Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial

2005/2006

Recuperação do 2º Teste - 15 de Fevereiro de 2006 - 14h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(7 val.) **1.** Tanto $\mathbb{S}^4$ como $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ são variedades de dimensão 4 compactas, 1-conexas e orientáveis. Use a cohomologia de de Rham para mostrar que $\mathbb{S}^4$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ não são difeomorfas.

(5 val.) **2.** Indique uma aplicação diferenciável $\Phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$ com grau 1.

3. Os acontecimentos à superfície da Terra podem ser modelados pelo fibrado de linha trivial $E = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$, onde $(p, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$ representa o acontecimento que ocorreu no ponto $p \in \mathbb{S}^2$ no instante $t = \log v \in \mathbb{R}$. Sejam (θ, φ) as habituais coordenadas esféricas em $\mathbb{S}^2$, definidas pela parametrização $\phi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{S}^2$ dada por

$$\phi(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta).$$

Devido ao movimento de rotação da Terra, a sincronização de relógios ao longo de uma curva $c : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ corresponde ao transporte paralelo determinado em E pela conexão ∇ cuja forma de conexão é

$$\omega = -\sin^2\theta \, d\varphi$$

(para uma certa escolha de unidades). Mostre que:

(3 val.) (a) A conexão ∇ não é plana.

(3 val.) (b) Se a curva c é dada em coordenadas locais por $c(s) = (\theta(s), \varphi(s))$, a equação do transporte paralelo é

$$\frac{dt}{ds}(s) - \sin^2\theta(s) \frac{d\varphi}{ds}(s) = 0.$$

(3 val.) (c) Se a curva c é fechada, a dessincronização entre o relógio inicial e o relógio final é igual a $-2A$, onde A é a área orientada da projecção de c no plano $\{z = 0\}$. Qual é a holonomia de ∇ ao longo de c?