Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial
2005/2006
Recuperação do 2º Teste - 14 de Janeiro de 2006 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(7 val.) **1.** Tanto $\mathbb{S}^4$ como $\mathbb{CP}^2$ são variedades de dimensão 4 compactas, 1-conexas e orientáveis. Use a cohomologia de de Rham para mostrar que $\mathbb{S}^4$ e $\mathbb{CP}^2$ não são difeomorfas.

(5 val.) **2.** Sejam M e N variedades compactas. Mostre que $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$.

(2 val.) **3.** (a) Seja V um espaço vectorial real. Mostre que se existe um operador linear $J : V \to V$ tal que $J^2 = -\operatorname{id}$ então V admite uma estrutura de espaço vectorial complexo tal que

$$(a + ib)v = av + bJv$$

para todo o $v \in V$.

(2 val.) (b) Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial real com uma conexão ∇, e $J \in \Gamma(\operatorname{End}(E))$ um operador tal que $J^2 = -\operatorname{id}$. Pela alínea anterior, ξ admite uma estrutura de fibrado vectorial complexo. Mostre que ∇ é uma conexão neste fibrado complexo **sse** $d_\nabla J = 0$.

(2 val.) (c) Seja M uma superfície Riemanniana orientada, ∇ a conexão de Levi-Civita e $\{E_1, E_2\}$ um referencial local ortonormado positivamente orientado. Mostre que o operador J definido por $J(E_1) = E_2$ e $J(E_2) = -E_1$ está bem definido e satisfaz $J^2 = -\operatorname{id}$ e $d_\nabla J = 0$. Portanto TM pode ser visto como um fibrado de linha complexo sobre M com uma conexão ∇ induzida pela conexão de Levi-Civita.

(2 val.) (d) Mostre que se M é uma superfície Riemanniana orientada então

$$c_1(TM) = \frac{1}{2\pi}\left[\Omega_1^2\right],$$

onde Ω_1^2 é a forma de curvatura num qualquer referencial ortonormado positivamente orientado. Use o Teorema de Gauss-Bonnet para mostrar que $c_1(TM) = \chi(TM)$.