Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial

2005/2006

2º Teste - 6 de Janeiro de 2006 - 14h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(6 val.) **1.** Use a cohomologia de de Rham para mostrar que os abertos

$$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e}$$
$$B = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,0) : x^2 + y^2 = 1\}$$

não são difeomorfos.

(5 val.) **2.** Mostre que qualquer aplicação diferenciável $\Phi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{T}^d$ tem grau zero.

3. Recorde que existe um fibrado de linha complexo sobre $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com uma conexão ∇ definida em $\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{C}$ pela forma

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{z d\overline{z} - \overline{z} dz}{1 + |z|^2}.$$

Seja $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^2$ o caminho $c(t) = e^{it}$. Mostre que:

(3 val.) (a) A conexão induzida em $c^*\xi$ é definida pela forma

$$c^*\omega = -\frac{i}{2}dt.$$

(3 val.) (b) O homomorfismo de holonomia ao longo de c é $H_1(c) = -\operatorname{id}$.

(3 val.) (c) A conexão ∇ não é plana.