Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial

2005/2006

Recuperação do 1º Teste - 15 de Fevereiro de 2006 - 14h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a estrutura de grupo de Lie em $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ determinada pela identificação $(x, y) \simeq \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostre que:

(2 val.) (a) Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ designa a base canónica de $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{R}^2$ então $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = -\mathbf{e}_1$.

(2 val.) (b) $\mathbb{R} \times \{0\}$ é um ideal de $\mathfrak{h}$.

(2 val.) (c) $\mathbb{R} \times \{1\}$ é um subgrupo normal de H.

(2 val.) (d) A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{h} \to H$ é um difeomorfismo.

(2 val.) (e) As órbitas da acção de H em H por conjugação estão contidas em rectas horizontais.

(2 val.) (f) H não possui subgrupos normais discretos não triviais.

(2 val.) (g) H é o único grupo de Lie conexo com álgebra $\mathfrak{h}$.

2. Os acontecimentos à superfície da Terra podem ser modelados pela variedade $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, onde $(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ representa o acontecimento que ocorreu no ponto $p \in \mathbb{S}^2$ no instante $t \in \mathbb{R}$. Sejam (θ, φ) as habituais coordenadas esféricas em $\mathbb{S}^2$, definidas pela parametrização $\phi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{S}^2$ dada por

$$\phi(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \cos \theta).$$

Devido ao movimento de rotação da Terra, relógios sincronizados ao longo de uma curva $c : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ registam valores diferentes num dado instante. Mais precisamente, os acontecimentos em que os relógios marcam todos o mesmo valor definem um levantamento $\hat{c} : [0, 1] \to M$ de c compatível com a distribuição D definida pela forma diferencial

$$\alpha = dt - \sin^2 \theta \, d\varphi$$

(para uma certa escolha de unidades). Mostre que:

(3 val.) (a) A distribuição D não é integrável.

(3 val.) (b) Se a curva c é fechada, a dessincronização entre o relógio inicial e o relógio final é igual a $-2A$, onde A é a área orientada da projecção de c no plano $\{z = 0\}$.