

Geometria Diferencial

2005/2006

Recuperação do 1º Teste - 14 de Janeiro de 2006 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

- (6 val.) 1. Mostre que o sistema de equações às derivadas parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, u) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y, u) \end{cases}$$

possui solução local para qualquer condição inicial $u(x_0, y_0) = u_0$ sse as funções diferenciáveis f e g satisfazem

$$\frac{\partial f}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial u}.$$

(**Sugestão:** Mostre que os gráficos das soluções do sistema são as subvariedades integrais da distribuição definida pela forma diferencial $\alpha = du - f dx - g dy$).

2. Recorde que $SL(2)$ designa o grupo das matrizes reais 2×2 com determinante igual a 1.

- (2 val.) (a) Mostre que as matrizes

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base para $\mathfrak{sl}(2)$, e calcule as **constantes de estrutura** para esta base (i.e. calcule os coeficientes C_{ij}^k tais que $[B_i, B_j] = \sum_{k=1}^3 C_{ij}^k B_k$).

- (2 val.) (b) Mostre que $\mathfrak{sl}(2)$ não possui ideais não triviais. O que pode concluir sobre os subgrupos normais de $SL(2)$?
- (2 val.) (c) Determine os subgrupos a um parâmetro gerados por B_1 , B_2 e B_3 .
- (2 val.) (d) Identificamos $\mathbb{R}^3$ com o espaço das matrizes reais 2×2 simétricas associando a $v = (t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ a matriz simétrica

$$V = \begin{pmatrix} t+x & y \\ y & t-x \end{pmatrix}.$$

Mostre que $SL(2)$ age em $\mathbb{R}^3$ mediante $A \cdot V = AVA^t$, e determine a correspondente acção infinitesimal $\psi : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$.

- (2 val.) (e) Determine os fluxos de $\psi(B_1)$, $\psi(B_2)$ e $\psi(B_3)$, e aproveite para indicar as órbitas da acção. (**Sugestão:** Note que $\det V = t^2 - x^2 - y^2$ é invariante pela acção).

- (2 val.) (f) Mostre que $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ não está na imagem de $\exp : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow SL(2)$.