Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial
2005/2006
1º Teste - 7 de Novembro de 2005 - 14h30m

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Mostre que:

(2 val.) (a) $\det : GL(n) \to GL(1) \equiv \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um homomorfismo de grupos de Lie;

(3 val.) (b) O homomorfismo induzido $\det_* : \mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{gl}(1) \equiv \mathbb{R}$ é dado por $\det_*(A) = \operatorname{tr}(A)$;

(2 val.) (c) $\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr}(A)}$ para qualquer matriz $A \in \mathfrak{gl}(n)$.

(5 val.) **2.** Seja $\Phi : N \to M$ uma imersão. Mostre que se $\dim N < \dim M$ então $\Phi(N)$ tem medida nula em M.

3. Seja $\Phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie, com G conexo, e $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ o homomorfismo induzido entre as respectivas álgebras de Lie. Mostre que:

(2 val.) (a) $\Phi_*(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}$;

(3 val.) (b) $\Phi(G)$ está contido no único subgrupo de Lie conexo de H que integra $\Phi_*(\mathfrak{g})$;

(3 val.) (c) Se Φ é sobrejectivo então Φ é uma submersão.

Sugestões:

1. (b) Note que da multilinearidade do determinante se segue que

$$\frac{d}{dt}\det(v_1(t), \ldots, v_n(t)) = \det(\dot{v}_1(t), \ldots, v_n(t)) + \ldots + \det(v_1(t), \ldots, \dot{v}_n(t))$$

para quaisquer funções diferenciáveis $v_1, \ldots, v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

2. Recorde que um subconjunto $A \subset M$ tem medida nula se para qualquer carta local (U, ϕ) o conjunto $\phi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^d$ tem medida nula ($d = \dim M$). Recorde ainda que a união contável de conjuntos com medida nula tem medida nula.

3. (b) Use as propriedades da aplicação exponencial.
   (c) Use o resultado da questão 2.