Resumos de Geometria Diferencial

6 de Janeiro de 2006

I. Fundamentos

1. Partições da Unidade

1. Toda a cobertura aberta de uma variedade diferenciável (Hausdorff, satisfazendo o 2º axioma da numerabilidade) possui uma subcobertura numerável.
2. Toda a variedade diferenciável M possui uma **exaustão compacta**, i.e. uma família de compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = M$.
3. Uma **partição da unidade** numa variedade M é uma família $\{\phi_i\}_{i\in I} \subset C^\infty(M)$ tal que
   (i) $\{\operatorname{supp}\phi_i\}_{i\in I}$ é localmente finita;
   (ii) $\phi_i(p) \geq 0$ e $\sum_{i\in I}\phi_i(p) = 1$ para todo o $p \in M$.
4. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura aberta da variedade M. Então existe uma partição da unidade **contável** $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **subordinada** à cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (i.e. $\operatorname{supp}\phi_n \subset U_{\alpha_n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$) com $\operatorname{supp}\phi_n$ **compacto** para todo o $n \in \mathbb{N}$.
5. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura aberta da variedade M. Então existe uma partição da unidade $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que $\operatorname{supp}\phi_\alpha \subset U_\alpha$ para todo o $\alpha \in A$.
6. Seja M uma variedade e $F \subset U \subset M$ com F fechado e U aberto. Então existe $\phi \in C^\infty(M)$ tal que
   (i) $0 \leq \phi(p) \leq 1$ para todo o $p \in M$;
   (ii) $\phi(p) = 1$ se $p \in F$;
   (iii) $\operatorname{supp}\phi \subset U$.

2. Subvariedades

1. Uma **subvariedade** (imersa) de M é um par (N, Φ), onde N é uma variedade e $\Phi : N \to M$ é uma imersão injectiva. Se $\Phi : N \to \Phi(N)$ é um homeomorfismo, Φ diz-se um **mergulho**, e (N, Φ) diz-se uma **subvariedade mergulhada**.
2. Seja (N, Φ) uma subvariedade de dimensão d de uma variedade M. Para todo o $p \in N$ existem coordenadas locais $(V, x^1, \ldots, x^e)$ centradas em $\Phi(p)$ e uma vizinhança U de p tais que
$$\Phi(U) = \{q \in V : x^{d+1}(q) = \ldots = x^e(q) = 0\}.$$
   Se (N, Φ) é mergulhada, podemos escolher V tal que $\Phi(U) = \Phi(N) \cap V$.
3. Se (N, Φ) é uma subvariedade de M e $\Psi : P \to M$ é uma aplicação diferenciável tal que $\Psi(P) \subset \Phi(N)$, existe uma única aplicação $\hat{\Psi} : P \to N$, dita a **aplicação induzida**, tal que $\Psi = \Phi \circ \hat{\Psi}$.

4. Seja (N, Φ) uma subvariedade de M, $\Psi : P \to M$ é uma aplicação diferenciável tal que $\Psi(P) \subset \Phi(N)$ e $\hat{\Psi} : P \to N$ a aplicação induzida.
   (i) Se $\hat{\Psi}$ é contínua então é diferenciável.
   (ii) Se Φ é um mergulho então $\hat{\Psi}$ é contínua (logo diferenciável).
5. Uma **subvariedade inicial** de M é uma subvariedade (N, Φ) tal que toda a aplicação diferenciável $\Psi : P \to M$ com $\Psi(P) \subset \Phi(N)$ se factoriza por uma aplicação $\hat{\Psi} : P \to N$ diferenciável.
6. Dizemos que (N_1, Φ_1) e (N_2, Φ_2) são **subvariedades equivalentes** de M se existe um difeomorfismo $\Psi : N_1 \to N_2$ tal que $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$.
7. Seja $A \subset M$ e $i : A \to M$ a inclusão. Então:
   (i) Fixada uma topologia em A, existe no máximo uma estrutura diferenciável em A tal que (A, i) é uma subvariedade.
   (ii) Se (A, i) é subvariedade para a topologia induzida, então esta é a única topologia em A tal que (A, i) é subvariedade.
8. Se $q \in N$ é um **valor regular** de $\Psi : M \to N$ (i.e., se $d_p\Psi$ é sobrejectiva para todo o $p \in \Psi^{-1}(q)$) então $\Psi^{-1}(q)$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão $\dim M - \dim N$.
9. Se $Q \subset N$ é uma subvariedade mergulhada e $\Psi : M \to N$ é **transversal** a Q (i.e., se $\operatorname{im} d_p\Psi + T_{\Psi(p)}Q = T_{\Psi(p)}N$ para todo o $p \in \Psi^{-1}(Q)$) então $\Psi^{-1}(Q)$ é uma subvariedade mergulhada de codimensão igual à codimensão de Q. Em particular, se M e Q são subvariedades mergulhadas transversais de N, $M \cap Q$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão $\dim M + \dim Q - \dim N$.

3. Folheações

1. Uma **folheação** de dimensão k da variedade M é uma decomposição $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M em conjuntos conexos por arcos disjuntos (**folhas**) tais que para qualquer ponto $p \in M$ existe um **aberto distinguido** $U \ni p$ e uma **carta distinguida** $(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{d-k}) : U \to \mathbb{R}^d$ tal que as componentes conexas de $L_\alpha \cap U$ (**placas**) são os conjuntos da forma
$$\{q \in U : y^1(q) = \text{constante}, \ldots, y^{d-k}(q) = \text{constante}\}.$$
2. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação k-dimensional de M. Qualquer folha de $\mathcal{F}$ é uma subvariedade inicial de dimensão k de M.
3. Se uma folha de uma folheação é fechada então é mergulhada.

4. Quocientes

1. Seja M um espaço topológico Hausdorff e $\sim$ uma relação de equivalência em M tal que a projecção natural $\pi : M \to M/\sim$ é uma aplicação aberta. Então $M/\sim$ é Hausdorff *sse* o **gráfico** de $\sim$, dado por
$$R = \{(p, q) \in M \times N : p \sim q\},$$
é um subconjunto fechado de $M \times M$.
2. Seja M uma variedade e $\sim$ uma relação de equivalência em M. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Existe uma estrutura diferenciável em $M/\sim$ tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma submersão.

(ii) O gráfico R de $\sim$ é uma subvariedade **própria** (i.e. mergulhada e fechada) de $M \times M$ e a projecção $p_1 : M \times M \to M$ restrita a R é uma submersão.

3. Uma **acção** do grupo G na variedade M é um homomorfismo de grupos $\Psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ (escrevemos $g \cdot p = \Psi(g)(p)$). O **quociente** de M pela acção $\Psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ é o quociente $G \setminus M$ de M pela relação de equivalência $\sim$ definida por $p \sim q$ *sse* existe $g \in G$ tal que $p = g \cdot q$. O **subgrupo de isotropia** de $p \in M$ é o subgrupo $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$. A acção diz-se **livre** se $G_p = \{e\}$ para todo o $p \in M$.
4. A acção $\Psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ diz-se **propriamente descontínua** se
   (i) Para todo o $p \in M$ existe um aberto $U \ni p$ tal que $g \cdot U \cap U = \varnothing$ para todo o $g \in G \setminus G_p$;
   (ii) Se $p \not\sim q$ então existem abertos $U \ni p$, $V \ni q$ tais que $g \cdot U \cap V = \varnothing$ para todo o $g \in G$.
5. Seja $\Psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ uma acção livre e propriamente descontínua. Então existe uma estrutura diferenciável $G \setminus M$ tal que $\pi : M \to G \setminus M$ é um difeomorfismo local (que é um revestimento). Se M é simplesmente conexa, então M é o revestimento universal de $G \setminus M$, e $\pi_1(G \setminus M) = G$.

II. Teoria de Lie

1. Derivada de Lie

1. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, defina-se

$$\gamma_p(\varepsilon) = \phi_X^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_Y^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_X^{\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_Y^{\sqrt{\varepsilon}}(p)$$

para $\varepsilon > 0$, onde ϕ_X^t e ϕ_Y^s são os fluxos de X e Y. Então

$$[X, Y] = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0^+} \gamma_p(\varepsilon).$$

2. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e ϕ_X^t o fluxo de X. A **derivada de Lie** da função $f \in C^\infty(M)$ ao longo de X é a função $\pounds_X f \in C^\infty(M)$ definida por

$$(\pounds_X f)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(\phi_X^t(p)) - f(p)\right).$$

Tem-se

$$\pounds_X f = X \cdot f.$$

3. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e ϕ_X^t o fluxo de X. A **derivada de Lie** do campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ao longo de X é o campo vectorial $\pounds_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$(\pounds_X Y)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(d\phi_X^{-t} \cdot Y_{\phi_X^t(p)} - Y_p\right).$$

Tem-se

$$\pounds_X Y = [X, Y].$$

4. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais com fluxos ϕ_X^t e ϕ_Y^s. Então $[X, Y] = 0$ *sse*

$$\phi_X^t \circ \phi_Y^s = \phi_Y^s \circ \phi_X^t.$$

2. Teorema de Frobenius

1. Uma **distribuição** D de dimensão k na variedade M é uma aplicação que a cada ponto $p \in M$ associa um subespaço k-dimensional $D_p \subset T_pM$. A distribuição D diz-se de classe C^∞ se para qualquer ponto $p \in M$ existe um aberto $U \ni p$ e campos vectoriais $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ tais que

$$D_q = \langle X_1(q), \ldots, X_k(q)\rangle$$

para todo o $q \in U$. Diz-se que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é **tangente** a D $(X \in \mathfrak{X}(D))$ se $X_p \in D_p$ para todo o $p \in M$.

2. Uma subvariedade conexa (N, Φ) de M diz-se uma **subvariedade integral** de D se

$$d_p\Phi(T_pN) = D_{\Phi(p)}$$

para todo o $p \in N$.

3. Uma distribuição D em M diz-se:
   (i) **involutiva** se $X, Y \in \mathfrak{X}(D) \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{X}(D)$;

(ii) **integrável** se existe uma folheação $\mathcal{F}$ de M cujas folhas são subvariedades integrais de D.

4. **Teorema de Frobenius:** D é integrável *sse* é involutiva. Neste caso, a folheação que integra D é única.

3. Grupos de Lie

1. Uma **álgebra de Lie** é um espaço vectorial $\mathfrak{g}$ com uma operação $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (**parêntesis de Lie**) que satisfaz:
   (i) **Anti-simetria:** $[X, Y] = -[Y, X]$;
   (ii) **Bilinearidade:** $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;
   (iii) **Identidade de Jacobi:** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
   ($X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $a, b \in \mathbb{R}$).
2. Um **grupo de Lie** é um grupo G com uma estrutura diferenciável tal que as aplicações $\mu : G \times G \to G$ e $\iota : G \times G \to G$ dadas por
$$\mu(g, h) = gh \quad \text{e} \quad \iota(g) = g^{-1}$$
são diferenciáveis.
3. Seja G um grupo de Lie. Um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ diz-se **invariante à esquerda** se $(L_g)_* X = X$ para todo o $g \in G$, onde a aplicação $L_g : G \to G$, definida por $L_g(h) = gh$ para todo o $h \in G$, se diz a **translacção esquerda** por g. O parêntesis de Lie de campos vectoriais induz uma estrutura de álgebra de Lie no subespaço $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$ formado pelos campos invariantes à esquerda, e a aplicação $\mathfrak{g} \to T_eG$ dada por $X \mapsto X_e$ é um isomorfismo vectorial (portanto podemos identificar $\mathfrak{g} \cong T_eG$, e $\mathfrak{g}$ tem dimensão $\dim G$).
4. Um **homomorfismo de álgebras de Lie** é uma aplicação **linear** $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que
$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$$
para todo o $X, Y \in \mathfrak{g}$.
5. Um **homomorfismo de grupos de Lie** é uma aplicação **diferenciável** $\Phi : G \to H$ que é um homomorfismo de grupos:
$$\Phi(gh^{-1}) = \Phi(g)\Phi(h)^{-1}$$
para todo o $g, h \in G$. A aplicação induzida $\Phi_* \equiv d_e\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.
6. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ diz-se uma **subálgebra de Lie** se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo o $X, Y \in \mathfrak{h}$.
7. Uma subvariedade (H, ϕ) de um grupo de Lie G diz-se um **subgrupo de Lie** se
   (i) H é um grupo de Lie;
   (ii) $\Phi : H \to G$ é um homomorfismo de grupos de Lie.

4. Integração de Álgebras de Lie em Grupos de Lie

1. Seja G um grupo de Lie conexo e U uma vizinhança da identidade $e \in G$. Então
$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} U^n$$
onde $U^n = \{g_1 \cdots g_n : g_1, \ldots, g_n \in U\}$.

2. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dada uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ existe um único subgrupo de Lie conexo H de G com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.
3. **Teorema de Ado:** Toda a álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ possui uma **representação fiel**, i.e. um homomorfismo injectivo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)$ (para algum $n \in \mathbb{N}$).
4. **Corolário:** Dada uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ existe um grupo de Lie G com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.
5. Sejam M, N espaços topológicos. Uma **aplicação de revestimento** é uma aplicação sobrejectiva $\pi : N \to M$ tal que para cada ponto $p \in M$ existe um aberto $U \ni p$ com $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, onde cada $V_\alpha \subset N$ é aberto, $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$ para $\alpha \neq \beta$ e $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ é um homeomorfismo. Se N é 1-conexo (i.e. N é conexo e $\pi_1(N) = \{e\}$), o revestimento diz-se o **revestimento universal**, e é único a menos de isomorfismo. Se M é uma variedade diferenciável então N possui uma estrutura diferenciável tal que $\pi : N \to M$ é um difeomorfismo local. Se N é conexa então N com esta estrutura diferenciável é uma variedade diferenciável.
6. O revestimento universal $\tilde{G}$ de um grupo de Lie G é um grupo de Lie, e a aplicação de revestimento $\pi : \tilde{G} \to G$ é um homomorfismo de grupos de Lie (portanto as álgebras de Lie de $\tilde{G}$ e G são isomorfas).
7. **Corolário:** Dada uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ existe um grupo de Lie 1-conexo G com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.
8. Se G é um grupo de Lie 1-conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ então para todo o homomorfismo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ existe um único homomorfismo $\Phi : G \to H$ tal que $\Phi_* = \phi$.
9. **Corolário:** Dada uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ existe um **único** (a menos de isomorfismo) grupo de Lie 1-conexo G com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.
10. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A **aplicação exponencial** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é a aplicação definida por
$$\exp(X) = \phi_X^1(e),$$
onde $e \in G$ é a identidade. Esta aplicação satisfaz:
    (i) $\exp((t+s)X) = \exp(tX)\exp(sX)$;
    (ii) $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$;
    (iii) $\exp$ é de classe C^∞ e $d_0 \exp = \mathrm{id}$;
    (iv) Se $\Phi : G \to H$ é um homomorfismo, $\Phi \circ \exp = \exp \circ \Phi_*$.
11. A aplicação $\exp : \mathfrak{gl}(n) \to GL(n)$ é dada por
$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$
12. Se G é um grupo de Lie e $H \subset G$ é um subgrupo fechado então H é um subgrupo de Lie mergulhado.

5. Acções de Grupos de Lie

1. Uma acção do grupo de Lie G na variedade M diz-se **diferenciável** se a aplicação $G \times M \to M$ dada por $(g, p) \mapsto g \cdot p$ é de classe C^∞. A acção diz-se **própria** se a aplicação $G \times M \to M \times M$ dada por $(g, p) \mapsto (p, g \cdot p)$ é própria (i.e. transforma inversamente compactos em compactos).

2. Uma **representação** de G é um homomorfismo de grupos de Lie $\Psi : G \to GL(V)$. A **representação adjunta** $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ é dada por $\mathrm{Ad}(g)(X) = d_e\Psi_g(X)$, onde $\Psi_g : G \to G$ é o homomorfismo de conjugação por $g \in G$, $\Psi_g(h) = ghg^{-1}$. Se G é um grupo matricial, $\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$.
3. Se a acção diferenciável do grupo de Lie G na variedade M é livre e própria então $G \setminus M$ possui uma estrutura diferenciável, compatível com a topologia quociente, tal que $\pi : M \to G \setminus M$ é uma submersão, com

$$\dim(G \setminus M) = \dim M - \dim G$$

4. Se G é um grupo de Lie e H é um subgrupo fechado, então a acção de H em G por multiplicação à direita (e à esquerda) é livre e própria.
5. Seja G um grupo de Lie que age de forma diferenciável na variedade M. Então
   (i) Os subgrupos de isotropia $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ são fechados;
   (ii) As **órbitas** $\{g \cdot p : g \in G\}$ são subvariedades (imersas), e a aplicação

$$G/G_p \to M \quad \text{dada por} \quad gG_p \mapsto g \cdot p$$

   é uma imersão injectiva;
   (iii) Se a acção é **transitiva** (i.e. se só existe uma órbita), então a aplicação

$$G/G_p \to M \quad \text{dada por} \quad gG_p \mapsto g \cdot p$$

   é um difeomorfismo **equivariante** (i.e. leva a acção de G em G/G_p na acção de G em M). (Neste caso M diz-se um **espaço homogéneo** para G; portanto qualquer espaço homogéneo para G é da forma G/H, onde H é um subgrupo fechado).
6. Seja G um grupo de Lie com uma acção diferenciável $\Psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$. A **acção infinitesimal** da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G em M é a aplicação $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\psi(X)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX) \cdot p.$$

   Esta aplicação é um **anti-homomorfismo** de álgebras de Lie, i.e.

$$\psi([X,Y]) = -[\psi(X), \psi(Y)].$$

7. Uma **acção infinitesimal** de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ numa variedade M é um anti-homomorfismo $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$. Se $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita e $\psi(X)$ é completo para todo o $X \in \mathfrak{g}$ então existe uma acção diferenciável $\Psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ tal que ψ é a acção infinitesimal associada a Ψ, onde G é o grupo de Lie 1-conexo com álgebra $\mathfrak{g}$.

III. Forma Diferenciais

1. Formas Diferenciais

1. Uma **forma diferencial** de grau k é uma secção de $\Lambda^k T^*M$. O conjunto das formas diferenciais de grau k designa-se por $\Omega^k(M)$.
2. $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^d \Omega^k(M)$ com o produto exterior é uma **álgebra de Grassmann**, i.e.
   (i) $(a\omega + b\eta) \wedge \theta = a\omega \wedge \theta + b\eta \wedge \theta$;
   (ii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{\deg\omega \deg\eta}\eta \wedge \omega$;
   (iii) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$
   $(a, b \in \mathbb{R}, \omega, \eta, \theta \in \Omega(M))$.
3. Se $\Phi : M \to N$ é diferenciável e $\omega \in \Omega^k(M)$, o **pull-back** de ω por Φ é a forma-k $\Phi^*\omega \in \Omega^k(N)$ definida por

$$\Phi^*\omega(X_1, \dots, X_k) = \omega(d\Phi(X_1), \dots, d\Phi(X_k)).$$

4. $\Phi^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ é um homomorfismo de álgebras de Grassmann, i.e.
   (i) $\Phi^*(a\omega + b\eta) = a\Phi^*\omega + b\Phi^*\eta$;
   (ii) $\Phi^*(\omega \wedge \eta) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\eta$
   $(a, b \in \mathbb{R}, \omega, \eta \in \Omega(M))$.
5. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^K(M)$, define-se $i_X\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ mediante

$$i_X\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

6. $i_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$ satisfaz:
   (i) $i_X(a\omega + b\eta) = ai_X\omega + bi_X\eta$;
   (ii) $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg\omega}\omega \wedge i_X\eta$ (i.e. i_X é uma derivação graduada);
   (iii) $i_{fX+gY}\omega = fi_X\omega + gi_Y\omega$;
   (iv) $i_X df = X(f)$;
   $(a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M), \omega, \eta \in \Omega(M))$.
7. Se $\dim M = d$, $\mu \in \Omega^d(M)$ diz-se uma **forma de volume** se $\mu_p \neq 0$ para todo o $p \in M$. M diz-se **orientável** se possui uma forma de volume.
8. Se $\omega \in \Omega^k(M)$, a sua **derivada exterior** $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ define-se mediante

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, X_1, \dots, X_k) = &\sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \end{aligned}$$

9. $d : \Omega^\bullet \to \Omega^{\bullet+1}$ é a única operação que
   (i) É $\mathbb{R}$-linear: $d(a\omega + b\eta) = ad\omega + bd\eta$;
   (ii) É derivação graduada: $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg\omega}\omega \wedge d\eta$;
   (iii) É extensão do diferencial: $df(X) = X(f)$ para $f \in \Omega^0(M) \equiv C^\infty(M)$;
   (iv) $d^2 = 0$.
10. Se $\Phi : M \to N$ é diferenciável e $\omega \in \Omega^k(M)$ então $d\Phi^*\omega = \Phi^*d\omega$.

11. Diz-se que $\omega \in \Omega^k(M)$ **aniquila** a distribuição D se $\omega(X_1, \ldots, X_k) = 0$ para quaisquer $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(D)$. O **aniquilador** de D é o conjunto $I(D) \subset \Omega(M)$ de todas as formas diferenciais que aniquilam D.
12. Se D é uma distribuição de dimensão k então $I(D)$ é um ideal de $\Omega(M)$ localmente gerado por $d-k$ formas-1 independentes. Reciprocamente, qualquer ideal deste tipo define uma distribuição de dimensão k.
13. Um ideal $I \subset \Omega(M)$ diz-se um **ideal diferencial** se $\omega \in I \Rightarrow d\omega \in I$.
14. Uma distribuição D é involutiva *sse* $I(D)$ é um ideal diferencial.
15. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e ϕ_X^t o fluxo de X. A **derivada de Lie** da forma-k $\omega \in \Omega^k(M)$ ao longo de X é a forma-k $\pounds_X \omega \in \Omega^k(M)$ definida por

$$(\pounds_X \omega)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\left(\phi_X^t\right)^* \omega_{\phi_X^t(p)} - \omega_p \right).$$

16. $\pounds_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$ satisfaz:
    (i) $\pounds_X(a\omega + b\eta) = a\pounds_X\omega + b\pounds_X\eta$;
    (ii) $\pounds_X(\omega \wedge \eta) = \pounds_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \pounds_X\eta$ (i.e. $\pounds_X$ é uma derivação);
    (iii) $\pounds_X f = X(f)$;
    (iv) $\pounds_X(d\omega) = d(\pounds_X\omega)$;
    (v) $\pounds_X(i_Y\omega) = i_{[X,Y]}\omega + i_Y(\pounds_X\omega)$.
    $(a, b \in \mathbb{R}, f \in C^\infty(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M), \omega, \eta \in \Omega(M))$.
17. **Fórmula mágica de Cartan:** $\pounds_X\omega = i_X d\omega + d i_X \omega$ (onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$).
18. Se M é uma variedade de dimensão d orientável e μ, ν são duas formas de volume então $\nu = f\mu$ onde $f \in C^\infty(M)$ não tem zeros. Dizemos que μ é **equivalente** a ν se $f > 0$. Uma **orientação** para M é uma classe de equivalência de formas de volume. Uma carta local (U, ϕ) diz-se **compatível** com a orientação $[\mu]$ se

$$(\phi^{-1})^*\mu \in [dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^d].$$

Dada uma forma-d com suporte compacto $\omega \in \Omega_c^d(M)$ e uma orientação $[\mu]$ para M, define-se o **integral** de ω em M com essa orientação da seguinte forma: se (U, ϕ) é compatível com $[\mu]$ e $\operatorname{supp} \omega \subset U$,

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^d} f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^d = \int_{\mathbb{R}^d} f dx^1 \ldots dx^d$$

para qualquer função com suporte compacto $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. O caso geral pode ser reduzido a uma soma finita de integrais deste tipo usando uma partição da unidade.
19. Se M e N são variedades de dimensão d **orientadas** (i.e. orientáveis e com uma escolha de orientação) e $\Phi : M \to M$ é um difeomorfismo que preserva orientações (i.e. se $[\mu]$ é a orientação de N então $[\Phi^*\mu]$ é a orientação de M) então para qualquer $\omega \in \Omega_c^d(N)$

$$\int_N \omega = \int_M \Phi^*\omega.$$

20. Se M é uma variedade de dimensão d orientada, $C \subset M$ é um conjunto fechado com **medida nula** (i.e. a imagem de C por qualquer carta local tem medida nula) e $\omega \in \Omega_c^d(M)$ então
$$\int_M \omega = \int_{M \setminus C} \omega.$$
21. **Teorema de Stokes:** Se M é uma variedade com bordo de dimensão d orientada e $\omega \in \Omega_c^{d-1}(M)$ então
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$
(onde o bordo ∂M possui a orientação induzida).
22. Se M é uma variedade (sem bordo) de dimensão d orientada e $\omega \in \Omega_c^{d-1}(M)$ tem suporte compacto então
$$\int_M d\omega = 0.$$
Em particular, se M é compacta e $\omega \in \Omega^{d-1}(M)$ então
$$\oint_M d\omega = 0.$$

2. Cohomologia de de Rham

1. Um **complexo diferencial** é um par (C, d), onde
   (i) C é um espaço vectorial $\mathbb{Z}$-graduado, i.e. $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k$ é uma soma directa de espaços vectoriais indexados em $\mathbb{Z}$;
   (ii) $d : C \to C$ é uma transformação linear de grau 1 (i.e. $d(C^k) \subset C^{k+1}$) tal que $d^2 = 0$ (d diz-se o **diferencial**).

   O espaço dos **cociclos**-k do complexo é
$$Z^k(C) = \{z \in C^k : dz = 0\},$$
   e o espaço dos **cobordos**-k do complexo é
$$B^K(C) = \{dz : z \in C^{k-1}\}.$$
   A **cohomologia** do complexo é $H(C) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(C)$, onde o k-ésimo **espaço de cohomologia** é
$$H^k(C) = \frac{Z^k(C)}{B^k(C)}.$$
2. Um **homomorfismo de complexos** entre (A, d_A) e (B, d_B) é uma aplicação linear $f : A \to B$ que:
   (i) Preserva a graduação: $f(A^k) \subset B^k$;
   (ii) Comuta com os diferenciais: $f d_A = d_B f$.

   Um homomorfismo de complexos induz um **homomorfismo** (i.e. uma aplicação linear que preserva a graduação) em cohomologia $f : H(A) \to H(B)$.
3. Uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ diz-se:
   (i) **Fechada** se $d\omega = 0$;
   (ii) **Exacta** se $\omega = d\eta$ para $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$.

4. A **cohomologia de de Rham** de uma variedade M é a cohomologia $H(M)$ do complexo diferencial $(\Omega(M), d)$.
5. Uma aplicação diferenciável $\Phi : M \to N$ induz um homomorfismo em cohomologia $\Phi^* : H(N) \to H(M)$. Se Φ é um difeomorfismo, Φ^* é um isomorfismo (portanto a cohomologia de de Rham é um invariante de variedades diferenciáveis).
6. A **cohomologia de suporte compacto** de uma variedade M é a cohomologia $H_c(M)$ do complexo diferencial $(\Omega_c(M), d)$. Se M é compacta, $H_c(M) = H(M)$.
7. Uma aplicação diferenciável **própria** $\Phi : M \to N$ induz um homomorfismo em cohomologia $\Phi^* : H_c(N) \to H_c(M)$. Se Φ é um difeomorfismo, Φ^* é um isomorfismo (portanto a cohomologia de suporte compacto é um invariante de variedades diferenciáveis).
8. Se a variedade M possui finitas componentes conexas então:
   (i) $H^0(M) \cong \mathbb{R}^l$, onde l é o número de componentes conexas de M;
   (ii) $H^0_c(M) \cong \mathbb{R}^{l'}$, onde l' é o número de componentes conexas **compactas** de M.
9. $H^0(\mathbb{S}^1) \cong H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$.

3. Invariância por Homotopia

1. Sejam (A, d_A) e (B, d_B) complexos diferenciais, e $f, g : A \to B$ homomorfismos. Uma aplicação linear $h : A \to B$ diz-se um **operador de homotopia** para f e g se
   (i) h é de grau -1 (i.e. $h(A^k) \subset B^{k-1}$);
   (ii) $f - g = \pm d_B h \pm h d_A$.

   Se f e g admitem um operador de homotopia então coincidem em cohomologia.
2. Seja M uma variedade diferenciável, $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ a projecção natural $\pi(p, t) = p$ e $s : M \to M \times \mathbb{R}$ a secção $s(p) = (p, t_0)$ (com $t_0 \in \mathbb{R}$). Então $\pi^* : H(M) \to H(M \times \mathbb{R})$ e $s^* : H(M \times \mathbb{R}) \to H(M)$ são inversos um do outro (portanto $H(M \times \mathbb{R}) \cong H(M)$).
3. **Lema de Poincaré:** $H^k(\mathbb{R}^d) \cong \begin{cases} \mathbb{R} \text{ se } k = 0 \\ 0 \text{ se } k \neq 0 \end{cases}$
4. Uma **homotopia** (diferenciável) entre $\Phi \in C^\infty(M, N)$ e $\Psi \in C^\infty(M, N)$ é uma aplicação $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ tal que $H(p, 0) = \Phi(p)$ e $H(p, 1) = \Psi(p)$ para todo o $p \in M$.
5. Se $\Phi, \Psi \in C^\infty(M, N)$ são homotópicas então $\Phi^* = \Psi^*$ em cohomologia.
6. Duas variedades M e N dizemn-se ter o mesmo **tipo de homotopia** se existem aplicações $\Phi \in C^\infty(M, N)$ e $\Psi \in C^\infty(N, M)$ tais que $\Psi \circ \Phi$ e $\Phi \circ \Psi$ são homotópicas a id_M e id_N. Se M e N possuem o mesmo tipo de homotopia então $H(M) \cong H(N)$.
7. Uma variedade M diz-se **contráctil** se possui o tipo de homotopia de um ponto. Se M é contráctil então $H^k(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} \text{ se } k = 0 \\ 0 \text{ se } k \neq 0 \end{cases}$
8. Seja M uma variedade e $N \subset M$ uma subvariedade mergulhada. Diz-se que uma aplicação $\pi \in C^\infty(M, M)$ é uma **retracção por deformação** de M em N se
   (i) $\pi(M) = N$;
   (ii) $\pi|_N = \mathrm{id}_N$;
   (iii) π é homotópica a id_M.

   Se existe uma retracção por deformação de M em N, N diz-se um **retrato por deformação** de M. Neste caso, $H(M) \cong H(N)$.

4. Sucessão de Mayer-Vietoris

1. Se C^k ($k \in \mathbb{Z}$) são espaços vectoriais e $f_k : C^k \to C^{k+1}$ são homomorfismos, a sucessão
$$\cdots \to C^{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} C^k \xrightarrow{f_k} C^{k+1} \to \cdots$$
diz-se **exacta** se $\operatorname{im} f_{k-1} = \ker f_k$. Uma **sucessão exacta curta** é uma sucessão da forma
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$
(por outras palavras, f é injectiva, g é sobrejectiva e $\operatorname{im} f = \ker g$). Definem-se sucessões exactas de complexos diferenciais exigindo que os homomorfismos forneçam sucessões exactas grau a grau.
2. Se
$$0 \to C^0 \to \cdots \to C^d \to 0$$
é uma sucessão exacta de espaços de dimensão finita então
$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i \dim C^i = 0.$$
3. Dada uma sucessão exacta curta
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$
de complexos diferenciais, existe uma **sucessão exacta longa associada** em cohomologia:
$$\cdots \to H^k(A) \xrightarrow{f} H^k(B) \xrightarrow{g} H^k(C) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(A) \to \cdots$$
A aplicação $d^* : H^\bullet(C) \to H^{\bullet+1}(A)$ diz-se o **homomorfismo de conexão**.
4. **Sucessão de Mayer-Vietoris:** Seja M uma variedade e $U, V \subset M$ abertos tais que $M = U \cup V$. Então existe uma sucessão exacta longa
$$\cdots \to H^k(M) \xrightarrow{f} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{g} H^k(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(M) \to \cdots$$
onde $f(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$ e $g(\theta, \eta) = \theta|_{U\cap V} - \eta|_{U\cap V}$.
5. $H^k(\mathbb{S}^d) \cong \begin{cases} \mathbb{R} \text{ se } k = 0 \text{ ou } k = d \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$

5. Fórmula de Euler

1. Uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de uma variedade M diz-se uma **boa cobertura** se qualquer intersecção finita $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ é difeomorfa a $\mathbb{R}^d$. M diz-se de **tipo finito** se possui uma boa cobertura finita.
2. Toda a variedade possui uma boa cobertura. Portanto qualquer variedade compacta é de tipo finito.
3. Se M é do tipo finito então os espaços $H^k(M)$ e $H^k_c(M)$ possuem dimensão finita.

4. O k-**símplice standard** é o conjunto

$$\Delta^k = \left\{ (t^1, \ldots, t^k) \in \mathbb{R}^k : t^1, \ldots, t^k \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{k} t^i \leq 1 \right\}.$$

Um k-**símplice regular** na variedade M é uma aplicação $\sigma : \Delta^k \to M$ que é um mergulho (ou seja, admite uma extensão a um aberto $U \supset \Delta^k$ que é um mergulho). A **face**-i do k-símplice regular $\sigma : \Delta^k \to M$ é o $(k-1)$-símplice regular $\sigma^i : \Delta^{k-1} \to M$ dado por

$$\sigma^i(t^1, \ldots, t^{k-1}) = \begin{cases} \sigma(t^1, \ldots, t^{i-1}, 0, t^i, \ldots, t^{k-1}) \text{ se } i = 1, \ldots, k \\ \\ \sigma\left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} t^j, t^1, \ldots, t^{k-1}\right) \text{ se } i = 0 \end{cases}$$

5. Uma **triangulação** de uma variedade compacta M de dimensão d é uma colecção finita $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha=1}^{r_d}$ de d-símplices regulares tais que:

   (i) $M = \displaystyle\bigcup_{\alpha=1}^{r_d} \operatorname{im} \sigma_\alpha$;

   (ii) Se $\operatorname{im} \sigma_\alpha \cap \operatorname{im} \sigma_\beta \neq \varnothing$ então $\operatorname{im} \sigma_\alpha \cap \operatorname{im} \sigma_\beta = \operatorname{im} \sigma_\alpha^i = \operatorname{im} \sigma_\beta^j$ para algum $i, j = 0, \ldots, d$.

6. A **característica de Euler** de uma variedade de tipo finito M é

$$\chi(M) = \dim H^0(M) - \dim H^1(M) + \ldots + (-1)^d \dim H^d(M).$$

7. **Fórmula de Euler:** Seja M uma variedade compacta de dimensão d. Para qualquer triangulação de M,

$$\chi(M) = r_d - r_{d-1} + \ldots + (-1)^d r_0,$$

onde r_i designa o número de faces-i na triangulação.

6. Dualidade de Poincaré

1. Se M é uma variedade então $H_c^k(M \times \mathbb{R}) \cong H_c^{k-1}(M)$ para todo o $k \in \mathbb{Z}$.

2. **Lema de Poincaré para formas de suporte compacto:** $H_c^k(\mathbb{R}^d) \cong \begin{cases} \mathbb{R} \text{ se } k = d \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$

3. **Sucessão de Mayer-Vietoris para cohomologia de suporte compacto:** Seja M uma variedade e $U, V \subset M$ abertos tais que $M = U \cup V$. Então existe uma sucessão exacta longa

$$\cdots \xleftarrow{d^*} H_c^k(M) \xleftarrow{g} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xleftarrow{f} H_c^k(U \cap V) \xleftarrow{d^*} H_c^{k-1}(M) \to \cdots$$

onde $f(\omega) = (-\omega, \omega)$ e $g(\theta, \eta) = \theta + \eta$.

4. **Dualidade de Poincaré:** Seja M uma variedade de dimensão d orientada e de tipo finito. Então a forma bilinear

$$H^k(M) \times H_c^{d-k}(M) \to \mathbb{R}$$
$$([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

é não degenerada. Em particular, $H^k(M) \cong \left(H_c^{d-k}(M)\right)^*$ (este isomorfismo é válido mesmo que M não seja de tipo finito).

5. Seja M uma variedade compacta e orientada de dimensão d. Então $H^k(M) \cong H_c^{d-k}(M)$. Se d é ímpar então $\chi(M) = 0$.
6. Seja M uma variedade conexa, orientável, de dimensão d. Então
   (i) $H^d(M) \cong \mathbb{R}$ se M é compacta;
   (ii) $H^d(M) \cong 0$ se M não é compacta;
   (iii) $H_c^d(M) \cong \mathbb{R}$.
7. Seja M uma variedade conexa não orientável de dimensão d. Então $H^d(M) \cong H_c^d(M) \cong 0$.

7. Teoria do Grau

1. Se M é uma variedade conexa, compacta e orientada, uma escolha canónica para o isomorfismo $H^d(M) \cong \mathbb{R}$ é
$$[\omega] \mapsto \int_M \omega.$$
Designamos a classe de cohomologia $\mu_M \in H^d(M)$ associada a $1 \in \mathbb{R}$ por este isomomorfismo a **orientação** de M (note-se que μ_M determina de facto uma orientação em M).
2. Sejam M e N variedades de dimensão d conexas, compactas e orientadas, e $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. O **grau** de Φ é o número real $\deg \Phi$ tal que $\Phi^*\mu_N = (\deg \Phi)\mu_M$, ou, equivalentemente, tal que
$$\int_M \Phi^*\omega = \deg \Phi \int_N \omega$$
para qualquer $\omega \in \Omega^d(M)$.
3. Sejam M e N variedades de dimensão d conexas, compactas e orientadas. Se $\Phi : M \to N$ e $\Psi : M \to N$ são homotópicas então $\deg \Phi = \deg \Psi$.
4. Sejam M e N variedades de dimensão d conexas, compactas e orientadas. Seja $q \in N$ um valor regular de $\Phi : M \to N$, e para cada $p \in \Phi^{-1}(q)$ defina-se
$$\operatorname{sgn}_p \Phi = \begin{cases} +1 \text{ se } d_p\Phi : T_pM \to T_qN \text{ preserva orientações} \\ -1 \text{ se } d_p\Phi : T_pM \to T_qN \text{ inverte orientações} \end{cases}$$
Então
$$\deg \Phi = \sum_{p \in \Phi^{-1}(q)} \operatorname{sgn}_p \Phi$$
(em particular, $\deg \Phi \in \mathbb{Z}$).
5. Se $U \subset \mathbb{R}^d$ é um aberto, $x_0 \in U$ é um zero isolado de $X \in \mathfrak{X}(U)$ e $\varepsilon > 0$ é tal que X não se anula em $\overline{B}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ então a **aplicação de Gauss** de X em x_0 é a aplicação $G : \mathbb{S}_\varepsilon^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$ dada por
$$G(x) = \frac{X_x}{\|X_x\|},$$
e o **índice** de X em x_0 é
$$\operatorname{ind}_{x_0} X = \deg G.$$

6. Se M é uma variedade e $p_0 \in M$ é um zero isolado de $X \in \mathfrak{X}(M)$, o **índice** de X em p_0 é
$$\operatorname{ind}_{p_0} X = \operatorname{ind}_0 \phi_* X,$$
onde (U, ϕ) é uma carta local qualquer centrada em p_0.
7. Se M é uma variedade, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p_0 \in M$ é um zero de X então o diferencial de $X : M \to TM$ é uma aplicação $d_{p_0} X : T_{p_0} M \to T_0 TM \cong T_{p_0} M \oplus T_{p_0} M$ da forma $d_{p_0} X = \operatorname{id} \times \partial_{p_0} X$. O zero p_0 diz-se **não degenerado** se $\partial_{p_0} X : T_{p_0} M \to T_{p_0} M$ é um isomorfismo. Se p_0 é um zero não degenerado então é isolado e
$$\operatorname{ind}_{p_0} X = \begin{cases} +1 \text{ se } \det \partial_{p_0} X > 0 \\ -1 \text{ se } \det \partial_{p_0} X < 0 \end{cases}$$
8. **Teorema de Poincaré-Hopf:** Se M é compacta e $X \in \mathfrak{X}(M)$ possui finitos zeros $\{p_1, \dots, p_N\}$ então
$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}_{p_i} X.$$

IV. Fibrados

1. Fibrados Vectoriais

1. Seja $\pi : E \to M$ uma submersão. Uma **carta trivializante** de dimensão r para π é um par (U, ϕ), onde $U \subset M$ é um aberto e $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ é um difeomorfismo tal que $\pi_1 \circ \phi = \pi$. Designamos por $\phi^p : E_p \to \mathbb{R}^r$ o difeomorfismo obtido por restrição de ϕ à **fibra** $E_p = \pi^{-1}(p)$.
2. Uma estrutura de **fibrado vectorial de rank** r em M é um terno $\xi = (\pi, E, M)$, onde $\pi : E \to M$ é uma submersão com uma colecção $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de cartas trivializantes de dimensão r que satisfaz:
   (i) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;
   (ii) As cartas são compatíveis: dados $\alpha, \beta \in A$ e $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, as **funções de transição** $g_{\alpha\beta}(p) = \phi^p_\alpha \circ (\phi^p_\beta)^{-1} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ são isomorfismos lineares (portanto cada fibra E_p possui uma estrutura de espaço vectorial);
   (iii) $\mathcal{C}$ é maximal.
3. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r e $U \subset M$ um aberto. Uma aplicação $s : U \to E$ diz-se uma **secção** se $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. O conjunto das secções em U designa-se por $\Gamma_U(E)$, e $\Gamma(E) = \Gamma_M(E)$. Um **referencial** em U é um conjunto de secções $\{s_1, \dots, s_r\} \subset \Gamma_U(E)$ tais que $\{s_1(p), \dots, s_r(p)\}$ é uma base de E_p para todo o $p \in U$.
4. Sejam $\xi_1 = (\pi_1, E_1, M_1)$ e $\xi_1 = (\pi_2, E_2, M_2)$ fibrados vectoriais. Um **morfismo de fibrados vectoriais** é uma aplicação diferenciável $\Psi : E_1 \to E_2$ que transforma linearmente fibras de ξ_1 em fibras de ξ_2. Diz-se que ξ_1 e ξ_2 são:
   (i) **Equivalentes** se existem morfismos $\Psi : E_1 \to E_2$ e $\Psi' : E_2 \to E_1$ que são inversos um do outro.
   (ii) **Isomorfos** se são equivalentes, $M_1 = M_2$ e $\Psi((E_1)_p) = (E_2)_p$.
5. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M. Um **cociclo** subordinado a esta cobertura é uma família de aplicações $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r)$ satisfazendo

   $$g_{\alpha\beta}(p) g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$$

   para todo o $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Dois cociclos $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ dizem-se **equivalentes** se existem aplicações $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(r)$ tais que

   $$g'_{\alpha\beta}(p) = \lambda_\alpha(p) g_{\alpha\beta}(p) \lambda^{-1}_\beta(p)$$

   para todo o $p \in U_\alpha \cap U_\beta$.
6. As funções de transiçãode um fibrado vectorial formam um cociclo. Funções de transição d fibrados isomorfos formam cociclos equivalentes.
7. Dado um cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ subordinado a uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M, existe um fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ que admite trivializações $\{\phi_\alpha\}$ cujas funções de transição são $\{g_{\alpha\beta}\}$. Dois cociclos equivalentes $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ determinam fibrados vectoriais isomorfos.
8. Um fibrado vectorial $\eta = (\tau, F, N)$ dize-se um **subfibrado vectorial** de $\xi = (\pi, E, M)$ se $F \subset E$ é uma subvariedade mergulhada de E e a inclusão é um morfismo de fibrados.

9. Se $\Psi : (\pi, E, M) \to (\tau, F, M)$ é um morfismo de fibrados que cobre a identidade e tem rank constante, podemos definir os seguintes fibrados vectoriais:
   (i) O **núcleo** de Ψ, $\ker \Psi \subset E$, cujo espaço total é $\{v \in E : \Psi(v) = 0\}$;
   (ii) A **imagem** de Ψ, $\operatorname{im} \Psi \subset F$, cujo espaço total é $\{\Psi(v) : v \in E\}$;
   (iii) O **co-núcleo** de Ψ, $\operatorname{coker} \Psi$, cujo espaço total é $F/\sim$, onde $w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow w_1 - w_2 \in \operatorname{im} \Psi$.
10. Se $\xi = (\pi, E, M)$ e $\eta = (\tau, F, M)$ são fibrados vectoriais sobre a mesma base com funções de transição $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$, podemos construir novos fibrados vectoriais a partir de construções naturais fibra a fibra. Assim definimos:
    (i) A **soma directa** $\xi \oplus \eta$, com fibras $E_p \oplus F_p$ e funções de transição $g_{\alpha\beta} \oplus h_{\alpha\beta}$;
    (ii) O **produto tensorial** $\xi \otimes \eta$, com fibras $E_p \otimes F_p$ e funções de transição $g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta}$;
    (iii) O **fibrado dual** ξ^*, com fibras E_p^* e funções de transição $g_{\alpha\beta}^{-t}$;
    (iv) O k-**ésimo produto exterior** $\Lambda^k \xi$, com fibras $\Lambda^k E_p^*$ e funções de transição $g_{\alpha\beta} \wedge \ldots \wedge g_{\alpha\beta}$;
    (v) O **fibrado dos homomorfismos** de $\operatorname{Hom}(\xi, \eta) \cong \xi^* \otimes \eta$.
11. Um fibrado vectorial de rank r ξ diz-se **orientável** se $\Lambda^r \xi$ é trivial.
12. Uma variedade M é orientável *sse* TM é um fibrado vectorial orientável.
13. Seja $\{g_{\alpha\beta}\}$ um cociclo para o fibrado vectorial ξ. O fibrado ξ é orientável *sse* existe um cociclo equivalente $\{g'_{\alpha\beta}\}$ com $\det g'_{\alpha\beta} > 0$.
14. Se o fibrado $\xi = (\pi, E, M)$ é orientável e M é orientável então E é uma variedade orientável.
15. Uma **estrutura Riemanniana** num fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ é uma escolha C^∞ de produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : E_p \times E_p \to \mathbb{R}$ (i.e. $s_1, s_2 \in \Gamma(E) \Rightarrow \langle s_1, s_2 \rangle \in C^\infty(M)$).
16. Qualquer fibrado vectorial ξ admite uma estrutura Riemanniana. Em particular, $\xi \simeq \xi^*$.
17. Seja $\{g_{\alpha\beta}\}$ um cociclo para o fibrado vectorial ξ. Então existe um cociclo equivalente $\{g'_{\alpha\beta}\}$ com valores em $O(r)$.
18. Seja $\psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $\xi = (\pi, E, N)$ um fibrado vectorial de rank r. O **pull-back** de ξ por ψ é o fibrado vectorial de rank r $\psi^*\xi = (\hat{\pi}, \psi^* E, M)$, onde
    $$\psi^* E = \{(p, v) \in M \times E : \psi(p) = \pi(v)\}$$
    e $\hat{\pi}(p, v) = p$ (portanto as fibras de $\psi^*\xi$ são $(\psi^* E)_p = E_{\psi(p)}$). A partir de trivializações $\{\phi_\alpha\}$ de ξ podemos construir trivializações $\{\hat{\phi}_\alpha\}$ de $\psi^*\xi$ tomando $\hat{\phi}_\alpha^p = \phi_\alpha^{\psi(p)}$. Os respectivos cociclos estão relacionados por $\hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ \psi$.

2. Classe de Thom e classe de Euler

1. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial. Então $H(E) \cong H(M)$.
2. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r, com E e M orientáveis de tipo finito. Então $H_c^k(E) \cong H_c^{k-r}(M)$.
3. **Dualidade de Thom:** Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r orientável e M uma variedade compacta e orientável. Então $H_c^k(E) \cong H^{k-r}(M)$.
4. A **classe de Thom** de um fibrado vectorial de rank r orientado $\xi = (\pi, E, M)$ sobre uma variedade compacta, conexa e orientada M é a imagem $[U] \in H_c^r(E)$ de $[1] \in H^0(M)$ pela dualidade de Thom $H_c^r(E) \cong H^0(M)$.

5. A classe de Thom de um fibrado vectorial de rank r orientado $\xi = (\pi, E, M)$ sobre uma variedade compacta, conexa e orientada M é a única classe $[U] \in H_c^r(E)$ que se restringe a cada fibra E_p como o gerador canónico de $H_c^r(E_p)$, i.e.
$$\int_{E_p} i^*U = 1$$
para todo o $p \in M$, onde $i : E_p \to E$ é a inclusão.
6. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r orientado sobre uma variedade compacta, conexa e orientada M. A **classe de Euler** de ξ é a classe
$$\chi(\xi) = [s^*U] \in H^r(M),$$
onde $[U] \in H_c^r(E)$ é a classe de Thom de ξ e $s : M \to E$ é uma secção global de ξ.
7. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial orientado sobre uma variedade compacta, conexa e orientada M. Se ξ admite uma secção que não se anula então $\chi(\xi) = 0$.
8. Seja M uma variedade compacta, conexa e orientada e dimensão d. Então para qualquer campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ com finitos zeros $\{p_1, \ldots, p_N\}$ tem-se
$$\chi(TM) = \left(\sum_{i=1}^N \operatorname{ind}_{p_i} X \right) \mu \in H^d(M),$$
onde $\mu \in H^d(M)$ é o gerador canónico.

3. Conexões e curvatura

1. Uma **conexão** num fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ é uma aplicação
$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, s) &\mapsto \nabla_X s \end{aligned}$$
satisfazendo
   (i) $\nabla_{X+Y} s = \nabla_X s + \nabla_Y s$;
   (ii) $\nabla_X (s + t) = \nabla_X s + \nabla_X t$;
   (iii) $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$;
   (iv) $\nabla_X (fs) = X(f)s + f \nabla_X s$

   para todo o $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$ e $f \in C^\infty(M)$.
2. Uma conexão ∇ num fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ é um operador **local**, i.e. a restrição $(\nabla_X s)|_U$ de $\nabla_X s$ a um aberto $U \subset M$ só depende de $s|_U$ e $X|_U$. Dado um referencial local $\{s_1, \ldots, s_r\}$ e coordenadas locais $\{x^1, \ldots, x^d\}$ em U tais que
$$s = \sum_{a=1}^r f^a s_a \quad \text{e} \quad X = \sum_{i=1}^d X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$
tem-se
$$\begin{aligned} \nabla_X s &= \sum_{a=1}^r \left(X(f^a) + \sum_{i=1}^d \sum_{b=1}^r \Gamma_{ib}^a X^i f^b \right) s_a \\ &= \sum_{a=1}^r \left(X(f^a) + \sum_{b=1}^r \omega_b^a(X) f^b \right) s_a \end{aligned}$$

em U, onde $\Gamma^a_{ib} \in C^\infty(U)$ são os **símbolos de Christoffel** relativos a este referencial e estas coordenadas, e $\omega^a_b = \sum_{i=1}^d \Gamma^a_{ib} dx^i \in \Omega^1(U)$ são as correspondentes **formas de conexão**. Portanto se f designa o vector coluna das componentes de s no referencial $\{s_1, \ldots, s_r\}$, $\nabla_X s$ possui neste referencial componentes

$$df(X) + \omega(X) f,$$

onde $\omega = (\omega^a_b)$ é a **matriz de conexão**.

3. Todo o fibrado vectorial admite uma conexão.
4. Uma conexão ∇ num fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ pode ser estendida:
   (i) Ao fibrado dual ξ^*, fazendo

   $$(\nabla_X \sigma)(s) = X(\sigma(s)) - \sigma(\nabla_X s)$$

   para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in \Gamma(\xi^*)$ e $s \in \Gamma(\xi)$;

   (ii) Ao produto tensorial $\xi \otimes \xi$, fazendo

   $$\nabla_X (s \otimes t) = (\nabla_X s) \otimes t + s \otimes (\nabla_X t)$$

   para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $s, t \in \Gamma(\xi)$;

   (iii) A qualquer produto tensorial de qualquer número de cópias de ξ e ξ^*, usando a construção acima;

   (iv) Ao pull-back $\psi^*\xi$ de ξ por qualquer aplicação diferenciável $\psi : N \to M$, definindo a conexão localmente a partir do pull-back das formas de conexão.
5. A **curvatura** da conexão ∇ no fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ é a aplicação

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, Y, s) &\mapsto R(X, Y)s \equiv \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s) - \nabla_{[X,Y]} s. \end{aligned}$$

6. A curvatura de uma conexão ∇ num fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ define um morfismo de fibrados $R : TM \oplus TM \oplus \xi \to \xi$. Dado um referencial local $\{s_1, \ldots, s_r\}$ e coordenadas locais $\{x^1, \ldots, x^d\}$ num aberto $U \subset M$, R é determinado em U pelos coeficientes R^a_{ijb} tais que

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) s_a = \sum_{b=1}^r R^b_{ija} s_b.$$

Estes coeficientes podem ser calculados a partir dos símbolos de Christoffel através da fórmula

$$R^a_{ijb} = \frac{\partial \Gamma^a_{jb}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^a_{ib}}{\partial x^j} + \sum_{c=1}^r \left(\Gamma^a_{ic}\Gamma^c_{jb} - \Gamma^a_{jc}\Gamma^c_{ib}\right)$$

ou codificados nas **formas de curvatura**

$$\Omega^a_b = \sum_{i<j} R^a_{ijb} dx^i \wedge dx^j,$$

que podem ser calculadas a partir das formas de conexão através da **equação de estrutura**

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \sum_{c=1}^r \omega^a_c \wedge \omega^c_b.$$

Matricialmente, esta equação escreve-se

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega,$$

onde $\Omega = (\Omega^a_b)$ é a **matriz de curvatura**.

7. **Identidade de Bianchi:** $d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$.
8. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma conexão ∇, e $c : [0,1] \to M$ uma curva diferenciável. Uma **secção de ξ ao longo de** c é uma aplicação $s : [0,1] \to E$ tal que $\pi(s(t)) = c(t)$, i.e. uma secção de $c^*\xi$. A **derivada covariante** de s é

$$\frac{Ds}{dt} = c^*\nabla_{\frac{d}{dt}} s,$$

onde $c^*\nabla$ designa a conexão induzida em $c^*\xi$. Localmente,

$$\frac{Ds}{dt}(t) = \sum_{a=1}^{r} \left(\frac{df^a}{dt}(t) + \sum_{i=1}^{d} \sum_{b=1}^{r} \Gamma^a_{ib}(c(t)) \frac{dc^i}{dt}(t) f^b(t) \right) s_a(c(t)).$$

Diz-se que s é **paralela** ao longo de c se $\frac{Ds}{dt} = 0$. Dado $v_0 \in E_{c(0)}$, existe uma única secção s paralela ao longo de c tal que $s(0) = v_0$. Diz-se então que $s(t)$ é obtido de v_0 por **transporte paralelo** ao longo de c, e escreve-se $s(t) = \tau_t(v_0)$. A aplicação $\tau_t : E_{c(0)} \to E_{c(t)}$ é portanto um isomorfismo linear.
9. Uma **conexão plana** é uma conexão cuja curvatura é identicamente nula.
10. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r com uma conexão plana ∇. Então para todo o $p \in M$ existe um aberto $U \ni p$ e um referencial local $\{s_1, \ldots, s_r\}$ em U tal que $\nabla_X s_a = 0$ $(a = 1, \ldots, r)$ para todo o $X \in \mathfrak{X}(U)$.
11. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma conexão ∇, $p_0 \in M$ e $c : [0,1] \to M$ uma curva diferenciável com $c(0) = c(1) = p_0$. A **holonomia** de ∇ com base em p_0 é a aplicação linear $H_{p_0}(c) : E_{p_0} \to E_{p_0}$ dada por $H_{p_0}(c)(v) = \tau_1(v)$.
12. Se ∇ é plana e $c_0, c_1 : [0,1] \to M$ são homotópicas com base em p_0 então $H_{p_0}(c_0) = H_{p_0}(c_1)$.
13. Seja M uma variedade conexa e $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r com uma conexão plana ∇. Então a holonomia de ∇ induz uma representação $H : \pi_1(M) \to GL(r)$ do grupo fundamental de M.
14. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma conexão ∇ em ξ diz-se **compatível com a métrica** se

$$X(\langle s_1, s_2 \rangle) = \langle \nabla_X s_1, s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla_X s_2 \rangle$$

para todo o $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$.
15. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. As seguintes afirmações são equivalentes:
    (i) ∇ é compatível com a métrica.
    (ii) O transporte paralelo $\tau_1 : E_{c(0)} \to E_{c(1)}$ ao longo de qualquer curva $c : [0,1] \to M$ é uma isometria.
    (iii) A matriz da conexão para qualquer referencial ortonormado é anti-simétrica.
16. Uma **conexão afim** em M é uma conexão no fibrado tangente TM.

17. Uma **geodésica** de uma conexão afim ∇ em M é uma curva $c : I \to M$ tal que $\frac{D\dot{c}}{dt}(t) = 0$.
18. A **torção** da conexão afim ∇ em M é a aplicação $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por
$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$
19. A torção de uma conexão afim em M define um morfismo de fibrados $T : TM \oplus TM \to TM$.
20. **Teorema de Levi-Civita:** Dada uma métrica Riemanniana em TM, existe uma única conexão afim ∇ em M com torção nula compatível com a métrica.

4. Classes características

1. Se $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial, define-se o espaço das **formas-k com valores em E** como
$$\Omega^k(M;E) = \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes E) = \Omega^k(M) \otimes \Gamma(E).$$
Em particular, $\Omega^0(M;E) = \Gamma(E)$.
2. Se $\omega \otimes s \in \Omega^k(M;E)$ e $\eta \otimes t \in \Omega^l(M;F)$, com $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^l(M)$, então
$$(\omega \otimes s) \wedge (\eta \otimes t) = (\omega \wedge \eta) \otimes s \otimes t.$$
3. Uma conexão ∇ determina um operador linear $d_\nabla : \Omega^0(M;E) \to \Omega^1(M;E)$, dado por $d_\nabla s(X) = \nabla_X s$.
4. Existe um único operador linear $d : \Omega^k(M;E) \to \Omega^{k+1}(M;E)$ que satisfaz a regra de Leibnitz:
$$d_\nabla(\omega \otimes s) = (d\omega) \otimes s + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d_\nabla s$$
para todo o $\omega \in \Omega^k(M)$ e $s \in \Gamma(E)$. Explicitamente,
$$\begin{aligned} d\omega(X_0, X_1, \ldots, X_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \nabla_{X_i}(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k) \end{aligned}$$
5. $d_\nabla(d_\nabla s)(X,Y) = R(X,Y)s$ para todo o $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \Gamma(E)$.
6. Se ∇ é plana, a cohomologia do complexo diferencial $(\Omega(M;E), d_\nabla)$ diz-se a **cohomologia de M com valores em E**, e designa-se por $H(M;E)$.
7. **Identidade de Bianchi:** $d_\nabla R = 0$.
8. Sega G um grupode Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Designamos por $I^k(G)$ o conjunto de todas as aplicações $P : \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ k-multilineares, simétricas, Ad-invariantes. A soma directa $I(G) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} I^k(G)$ munida do produto simétrico é um anel, isomorfo ao anel dos polinómios Ad-invariantes em $\mathfrak{g}$.
9. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r. Todo o elemento $P \in I^k(GL(r))$ determina uma aplicação $P : \Omega^k(M; \otimes^k \operatorname{End}(E)) \to \Omega^k(M)$ que satisfaz $P d_\nabla = dP$.
10. **Teorema de Chern-Weyl:** Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r com uma conexão ∇ de curvatura $R \in \Omega^2(M; \operatorname{End}(E))$. Dado $P \in I^k(GL(r))$, a forma $P(R^k) \in \Omega^{2k}(M)$ define uma classe de cohomologia que não depende da escolha da conexão ∇.

11. As **funções simétricas elementares** $\sigma_k \in I^k(GL(r))$ (ou $I^k(GL(r,\mathbb{C}))$ definem-se mediante
$$\det(I+\lambda A) = 1 + \lambda\,\sigma_1(A) + \ldots \lambda^r \sigma_r(A).$$
Em particular, $\sigma_1(A) = \mathrm{tr}(A)$ e $\sigma_r(A) = \det(A)$.
12. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial **complexo** de rank r com uma conexão ∇ de curvatura $R \in \Omega^2(M; \mathrm{End}(E))$. As **classes de Chern** de ξ são
$$c_k(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^k}\left[\sigma_k(R^k)\right] \in H^{2k}(M)$$
$(k = 1, \ldots, r)$. A **classe de Chern total** de ξ é
$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \ldots + c_r(\xi) \in H(M).$$
13. As classes de Chern satisfazem:
    (i) $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cup c(\eta) \equiv [c(\xi) \wedge c(\eta)]$;
    (ii) $c(\psi^*\xi) = \psi^* c(\xi)$;
    (iii) Se ξ admite uma conexão plana então $c(\xi) = 1$;
    (iv) Se ξ e η são fibrados de linha então $c_1(\xi \otimes \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta)$.
14. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial **real** de rank r com uma conexão ∇ de curvatura $R \in \Omega^2(M; \mathrm{End}(E))$. As **classes de Pontryagin** de ξ são
$$p_k(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{2k}}\left[\sigma_{2k}(R^{2k})\right] \in H^{4k}(M).$$
Tem-se que $p_k(\xi) = c_{2k}(\xi \otimes \mathbb{C})$.