Geometria Diferencial

Ficha 9

A entregar até à aula de Quinta-feira dia 17 de Novembro

1. Calcule $H(M)$, onde:

   (a) M é uma superfície compacta arbitrária;

   (b) $M = \mathbb{P}^d$;

   (c) $M = \mathbb{T}^d$.

   Não precisam de entregar:

2. Seja M uma variedade diferenciável não orientável de dimensão d, e $p \in M$. Recorde que duas bases de T_pM se dizem ser **equivalentes** se a respectiva matriz de mudança de base possui determinante positivo. Seja $\mathcal{O}_p$ o conjunto das (duas) classes de equivalência de bases de T_pM (as quais se designam por **orientações** de T_pM), e defina-se

   $$\widetilde{M} = \{(p, O_p) : \ p \in M, O_p \in \mathcal{O}_p\}.$$

   Dada uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \to M$, definimos a aplicação $\widetilde{\varphi} : U \to \widetilde{M}$ através de

   $$\widetilde{\varphi}(x^1, \ldots, x^d) = \left(\varphi(x^1, \ldots, x^d), \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^d}\right]\right).$$

   (a) Mostre que $\widetilde{M}$ é uma variedade diferenciável **orientável** de dimensão d.

   (b) Mostre que a aplicação $\pi : \widetilde{M} \to M$ definida por $\pi(p, O_p) = p$ é uma aplicação de revestimento, *i.e.*, mostre que para cada $p \in M$ existe um aberto $U \ni p$ tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1, V_2 são abertos disjuntos e $\pi|_{V_i}$ é um difeomorfismo ($i = 1, 2$). ($\widetilde{M}$ diz-se então o **revestimento duplo orientável** de M).

   (c) Seja $\Phi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ a aplicação definida por $\Phi(p, O_p) = (p, -O_p)$, onde $-O_p$ designa a orientação de T_pM contrária a O_p. Mostre que Φ é um difeomorfismo que inverte a orientação e satisfaz $\pi \circ \Phi = \pi$, $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}$.

   (d) Mostre que $\widetilde{\omega} \in \Omega^k(\widetilde{M})$ satisfaz $\widetilde{\omega} = \pi^*\omega$ para algum $\omega \in \Omega^k(M)$ *sse* $\Phi^*\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}$.

   (e) Mostre que $H^d(M) = H^d_c(M) = 0$.