Geometria Diferencial

Ficha 7

A entregar até à aula de Quinta-feira dia 3 de Novembro

1. Uma **variedade simpléctica** é um par (M, ω), onde M é uma variedade e $\omega \in \Omega^2(M)$ é uma forma-2 **fechada** ($d\omega = 0$) e **não degenerada** (a aplicação $T_pM \to T_p^*M$ dada por $v \mapsto i_v\omega$ é um isomorfismo vectorial para todo o $p \in M$). Mostre que:

   (a) M possui necessariamente dimensão par $d = 2n$;

   (b) $\mu = \omega^n$ é uma forma de volume em M (portanto qualquer variedade simpléctica é orientável);

   (c) Uma superfície admite uma estrutura simpléctica *sse* é orientável;

   (d) Se N é uma variedade diferenciável então $M = T^*N$ possui uma forma simpléctica canónica $\omega = d\theta$, com $\theta_\alpha = \pi^*\alpha$ (onde $\pi : M \to N$ é a projecção canónica);

   (e) Se M é compacta, a classe de cohomologia $[\omega] \in H^2(M)$ é não trivial (portanto a única esfera que admite uma estrutura simpléctica é $\mathbb{S}^2$);

   (f) Qualquer função $f \in C^\infty(M)$ é constante ao longo do fluxo do seu **gradiente simpléctico** X_f, definido por $i_{X_f}\omega = df$;

   (g) O fluxo de um gradiente simpléctico X_f preserva a forma simpléctica, i.e. $\pounds_{X_f}\omega = 0$;

   (h) Se $N \subset M$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão $2k$ então

   $$\int_{\phi^t_{X_f}(N)} \omega^k = \int_N \omega^k$$

   (para orientações apropriadas);

   (i) O **parêntesis de Poisson** $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, definido pela fórmula $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$, determina uma estrutura de álgebra de Lie em $C^\infty(M)$;

   (j) A aplicação $C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$, dada por $f \mapsto X_f$, é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie, i.e. $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.

   Não precisam de entregar:

2. Calcule a cohomologia de de Rham da banda de Möbius.