Geometria Diferencial

Ficha 6

A entregar até à aula de Quinta-feira dia 27 de Outubro

1. (a) Mostre que existe uma bijecção entre o conjunto $G_k(\mathbb{R}^d)$ dos subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^d$ com dimensão k e o quociente $O(d)/O(k)\times O(d-k)$ (portanto $G_k(\mathbb{R}^d)$ admite uma estrutura de variedade diferenciável, dita a **variedade Grassmanniana** dos planos-k em $\mathbb{R}^d$; note que $G_1(\mathbb{R}^{d+1}) = \mathbb{RP}^d$).
   (b) Mostre que $\dim G_k(\mathbb{R}^d) = k(d-k)$.
   (c) Verifique que $G_k(\mathbb{R}^d)$ é difeomorfa a $G_{d-k}(\mathbb{R}^d)$.

2. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e H um subgrupo fechado com álgebra $\mathfrak{h}$. Mostre que:
   (a) Se H é um subgrupo normal então G/H é um grupo de Lie e $\pi : G \to G/H$ é um homomorfismo de grupos de Lie.
   (b) Se G e H são conexos então H é um subgrupo normal de G *sse* $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ (i.e. $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ tal que $X \in \mathfrak{h} \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{h}$ para todo o $Y \in \mathfrak{g}$).

3. Seja G um grupo de Lie conexo e $\pi : \tilde{G} \to G$ o seu revestimento universal. Mostre que:
   (a) $\ker \pi$ é um subgrupo normal, fechado, discreto, contido no centro de $\tilde{G}$ (portanto abeliano);
   (b) G é isomorfo a $\tilde{G}/\ker \pi$ (portanto $\ker \pi$ é o grupo fundamental de G).

Não precisam de entregar:

4. Mostre que a acção de uma grupo de Lie discreto (i.e. de dimensão $d = 0$) numa variedade é livre e própria *sse* é livre e propriamente descontínua.

5. A variedade Grassmanniana mais simples que não é um espaço projectivo é $G_2(\mathbb{R}^4)$.
   (a) Mostre que se $\alpha, \beta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)$ satisfazem $\alpha \wedge \beta \neq 0$ então $V = \ker \alpha \cap \ker \beta$ é um plano-2. Reciprocamente, mostre que qualquer plano-2 $V \subset \mathbb{R}^4$ é desta forma.
   (b) Mostre que $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ é **decomponível**, i.e. da forma $\omega = \alpha \wedge \beta$ (com $\alpha, \beta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)$) *sse* $\omega \wedge \omega = 0$.
   (c) Mostre que é possível identificar $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ com $\mathbb{R}^6$ de modo a que as forma-2 decomponíveis correspondem à subvariedade

   $$\{(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \in \mathbb{R}^6 : x^0x^3 + x^1x^4 + x^2x^5 = 0\}.$$

   Conclua que existe uma bijecção entre $G_2(\mathbb{R}^4)$ e a **quádrica de Klein**

   $$K = \{[x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5] \in \mathbb{RP}^5 : x^0x^3 + x^1x^4 + x^2x^5 = 0\}.$$

   Pode mostrar-se que esta bijecção é na realidade um difeomorfismo.