Geometria Diferencial

Ficha 5

A entregar até à aula de Quinta-feira dia 20 de Outubro

1. Recorde que o anel $\mathbb{H}$ dos **quaterniões** é isomorfo à álgebra de matrizes gerada por

$$\mathbf{1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{i} = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{j} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{k} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

(portanto $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$). Identificando o subcorpo $\langle \mathbf{1} \rangle$ com $\mathbb{R}$ e $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ com $\mathbb{R}^3$, podemos escrever qualquer quaternião na forma $a + \mathbf{v}$, onde $a \in \mathbb{R}$ se diz a **parte real** e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ a **parte vectorial**. O produto de quaterniões é então dado por

$$(a + \mathbf{v})(b + \mathbf{w}) = ab - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + a\mathbf{w} + b\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

O **conjugado** do quaternião $q = a + \mathbf{v}$ é o quaternião $\overline{q} = a - \mathbf{v}$ (correspondente à matriz transposta conjugada), e a sua **norma** é $|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + \|\mathbf{v}\|^2}$ (coincidindo portanto com a norma Euclideana em $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$).

Mostre que:

(a) A subvariedade $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ formada pelos quaterniões unitários é um grupo de Lie isomorfo a $SU(2)$.

(b) A álgebra de Lie $\mathfrak{s}^3$ pode ser identificada com os quaterniões vectoriais, com

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 2\mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

(c) A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{s}^3 \to \mathbb{S}^3$ é dada por

$$\exp(\mathbf{v}) = \cos \|\mathbf{v}\| + \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \operatorname{sen} \|\mathbf{v}\|$$

(e é portanto sobrejectiva).

(d) $\operatorname{Ad}(\exp(\mathbf{v})) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a rotação por $2\|\mathbf{v}\|$ em torno de $\mathbf{v}$.

(e) Existe um homomorfismo $\Phi : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$ que é um revestimento duplo (portanto $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$).

2. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\operatorname{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ a representação adjunta. Uma vez que Ad é um homomorfismo de grupos de Lie, determina um homomorfismo de álgebras $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Mostre que:

(a) $\operatorname{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ para todo o $X, Y \in \mathfrak{g}$;

(b) $\exp(X)\exp(Y)\exp(-X) = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\operatorname{ad}(X))^n Y\right)$ para todo o $X, Y \in \mathfrak{g}$;

(c) Se G é conexo então G é abeliano *sse* $\mathfrak{g}$ é abeliana.

Não precisam de entregar:

3. O **centro** de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a subálgebra

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \text{ para qualquer } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Prove o Teorema de Ado para álgebras de Lie com centro trivial.