Geometria Diferencial

Ficha 4

A entregar até à aula de Quinta-feira dia 13 de Outubro

1. Seja $(P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial **fechado**, i.e.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Mostre que:

(a) A distribuição D determinada em $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ pelos campos

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + Q\frac{\partial}{\partial z}$$

é involutiva.

(b) Para cada $c \in \mathbb{R}$ a aplicação $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + c)$ leva subvariedades integrais de D em subvariedades integrais de D.

(c) A restrição da projecção $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ às subvariedades integrais de D é um difeomorfismo local que é um revestimento.

(d) Se U é simplesmente conexo então existe $f : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$(P, Q) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

2. Mostre que a álgebra de Lie de $GL(n)$ é isomorfa a $\mathfrak{gl}(n)$.

Não precisam de entregar:

3. Dê um exemplo de uma distribuição de dimensão 1 que não é globalmente gerada por um único campo vectorial.

4. Mostre que na definição de grupo de Lie basta assumir que o produto é diferenciável. (**Sugestão:** Use o Teorema da Função Implícita).