Geometria Diferencial

Ficha 13

A entregar até ao 2º teste

1. Considere o fibrado de linha complexo $\xi = \left(\pi, \mathbb{CP}^2 \setminus \{[0,0,1]\}, \mathbb{CP}^1\right)$ definido anteriormente. Calcule as seguintes classes de Chern:

   (a) $c_1(\xi)$;
   (b) $c_1(\xi^*)$;
   (c) $c_1(\xi \otimes \xi^*)$;
   (d) $c_1(\otimes^n \xi)$;
   (e) $c_1(\otimes^n \xi^*)$;
   (f) $c_1(T\mathbb{S}^2)$.

   (**Nota:** Vemos portanto $\{\otimes^n \xi\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\xi \otimes \xi^*\} \cup \{\otimes^n \xi^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família numerável de fibrados de linha complexos sobre $\mathbb{S}^2$ não equivalentes; na realidade, pode-se provar que esta família inclui **todos** os fibrados de linha complexos sobre $\mathbb{S}^2$).

   Não precisam de entregar:

2. A esfera $\mathbb{S}^4$ pode ser dada por duas parametrizações $\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{S}^4$ cuja função de transição é
$$y = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) = x^{-1}$$
(as cartas locais correspondentes são, a menos de reordenamento das coordenadas, as projecções estereográficas a partir dos dois pólos). Mostre que as formas locais
$$\omega = \frac{x d\bar{x} - dx \bar{x}}{2\left(1 + |x|^2\right)} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{y d\bar{y} - dy \bar{y}}{2\left(1 + |y|^2\right)}$$
satisfazem
$$\theta = \left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} \omega \ \frac{x}{|x|} + \left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} d\left(\frac{x}{|x|}\right)$$
e portanto determinam uma conexão num certo fibrado vectorial E sobre $\mathbb{S}^4$ com grupo de estrutura $SU(2)$. Calcule a segunda classe de Chern $c_2(E)$, e conclua que este fibrado não é trivial.