Geometria Diferencial

Ficha 12

A entregar até à aula de Terça-feira dia 13 de Dezembro

1. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r com uma conexão ∇. Sejam $\{s_1, \ldots, s_r\}$ e $\{s'_1, \ldots, s'_r\}$ dois referenciais locais num aberto trivializante $U \subset M$, relacionados pela matriz de mudança de base $A \in C^\infty(U, GL(r))$. Mostre que:

   (a) As matrizes ω e ω' das formas de conexão associada aos dois referenciais satisfazem
   $$\omega' = A^{-1}\omega A + A^{-1}dA.$$

   (b) As matrizes Ω e Ω' das formas de curvatura associadas aos dois referenciais satisfazem
   $$\Omega' = A^{-1}\Omega A.$$

2. Considere o fibrado de linha complexo $\xi = \left(\pi, \mathbb{CP}^2 \setminus \{[0,0,1]\}, \mathbb{CP}^1\right)$ definido anteriormente. Mostre que:

   (a) Tomando como abertos trivializantes
   $$U_1 = \{[z,1] \in \mathbb{CP}^1 : z \in \mathbb{C}\} \quad \text{e} \quad U_2 = \{[1,w] \in \mathbb{CP}^1 : w \in \mathbb{C}\}$$
   existe um cociclo $g_{21} : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para este fibrado dado por
   $$g_{21}([z,1]) = \frac{\overline{z}}{|z|}.$$

   (b) As formas-1 com valores complexos ω e η dadas nas coordenadas z e w por
   $$\omega = \frac{1}{2}\frac{z d\overline{z} - \overline{z} dz}{1+|z|^2} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{w d\overline{w} - \overline{w} dw}{1+|w|^2}$$
   definem para este cociclo uma conexão ∇ em ξ.

   (c) A forma de curvatura é dada em U_1 por
   $$\Omega = \frac{dz \wedge d\overline{z}}{\left(1+|z|^2\right)^2}.$$

   Não precisam de entregar:

3. Mostre que o fibrado de linha complexo $\xi = \left(\pi, \mathbb{CP}^2 \setminus \{[0,0,1]\}, \mathbb{CP}^1\right)$ é o fibrado dual do fibrado canónico $\gamma_2^1(\mathbb{C})$.

4. Mostre que $\xi \otimes \gamma_2^1(\mathbb{C})$ é o fibrado trivial.