Geometria Diferencial

Ficha 11

A entregar até à aula de Terça-feira dia 6 de Dezembro

1. Seja $E = \mathbb{P}^{d+1} \setminus \{[0, \ldots, 0, 1]\}$, e $\pi : E \to \mathbb{P}^d$ a aplicação dada por

$$\pi\left(\left[x^0, \ldots, x^{d+1}\right]\right) = \left[x^0, \ldots, x^d\right].$$

   Mostre que:

   (a) As parametrizações $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to E$ dadas por

$$\phi_i^{-1}\left(u^1, \ldots, u^d, t\right) = \left[u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^i, \ldots, u^d, t\right]$$

   definem um fibrado de linha $\xi = (\pi, E, \mathbb{P}^d)$.

   (b) ξ é isomorfo ao fibrado tautológico γ^1_{d+1} sobre $\mathbb{P}^d$.

   (c) γ^1_{d+1} não é o fibrado trivial. (**Sugestão:** Note que o fibrado trivial é orientável).

   (d) O pull-back de γ^1_{d+1} pela aplicação $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ dada por

$$\psi\left(\left[x^0, x^1\right]\right) = \left[(x^0)^d, (x^0)^{d-1}x^1, \ldots, x^0(x^1)^{d-1}, (x^1)^d\right]$$

   é isomorfo a $\gamma^1_2 \otimes \ldots \otimes \gamma^1_2$ (produto tensorial com d factores).

2. A mesma construção permite obter um fibrado de linha **complexo** (portanto um fibrado vectorial real de rank 2) $\xi = (\pi, E, \mathbb{CP}^1)$ com espaço total $E = \mathbb{CP}^2 \setminus \{[0, 0, 1]\}$ e base $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$. Mostre que:

   (a) A aplicação $s : \mathbb{CP}^1 \to E$ dada por $s([z, w]) = [z, w, z]$ é uma secção de ξ.

   (b) ξ é um fibrado orientável, com $\chi(\xi) = \mu$ para uma certa escolha de orientação, onde μ é o gerador canónico de $H^2(\mathbb{S}^2)$.

   (c) ξ é um fibrado não trivial que não é isomorfo a $T\mathbb{S}^2$.

   Não precisam de entregar:

3. Sejam M e N variedades compactas e orientáveis. Mostre que $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$.

4. Seja ξ um fibrado vectorial orientado de rank r sobre uma variedade compacta, conexa e orientada M. Mostre que se r é ímpar então $\chi(\xi) = 0$.