Geometria Diferencial

Ficha 10

A entregar até à aula de Quinta-feira dia 24 de Novembro

1. Seja G um grupo de Lie compacto. Mostre que $\chi(G) = 0$.

2. (a) Mostre que $\mathbb{CP}^1$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^2$.
   (b) Mostre que a aplicação $\Phi : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ dada por $\Phi([z, w]) = [z^n, w^n]$ é diferenciável para todo o $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Calcule o grau de Φ.

3. Seja $\Phi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ um difeomorfismo. Mostre que:
   (a) Se Φ não tem pontos fixos então Φ é homotópica à aplicação antipodal.
   (b) Se d é par e Φ preserva orientações então Φ tem pelo menos um ponto fixo.

   Não precisam de entregar:

4. Mostre que qualquer aplicação $\Phi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{T}^d$ tem grau zero.

5. (a) Mostre que se uma aplicação $\Phi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ pode ser estendida à bola fechada

$$B = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| \leq 1\}$$

   como uma aplicação diferenciável $\widetilde{\Phi} : B \to \mathbb{S}^d$ então $\deg \Phi = 0$. Conclua que a aplicação identidade $\mathrm{id} : \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ não pode ser estendida desta forma.
   (b) Prove a seguinte versão do **Teorema do Ponto Fixo de Brower**: toda a aplicação diferenciável $\Psi : B \to B$ tem pelo menos um ponto fixo.