Geometria Diferencial

Ficha 1

A entregar até à aula de Quinta-feira dia 22 de Setembro

1. Seja M uma variedade diferenciável, $p_1, \ldots, p_n \in M$ e $v_1 \in T_{p_1}M, \ldots, v_n \in T_{p_n}M$. Mostre que existe um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_{p_1} = v_1, \ldots, X_{p_n} = v_n$.

2. Seja $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$\Phi([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(yz, xz, xy).$$

   Mostre que Φ é uma aplicação diferenciável e verifique que é uma imersão quando restrita a $\mathbb{P}^2$ excepto exactamente 6 pontos.

3. Seja (N, Φ) uma subvariedade de M, com N compacta. Mostre que (N, Φ) é mergulhada.

   Não precisam de entregar:

4. Mostre que qualquer variedade diferenciável é conexa por arcos.

5. Mostre que o conjunto $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ **não é** imagem de nenhuma imersão $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.