

Resumos de CDI-II

1. Topologia, continuidade e limites em $\mathbb{R}^n$

1. A **bola aberta** de centro em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto

$$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}.$$

2. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. Um ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ diz-se:

- (i) **interior** a A se existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{a}) \subset A$;
- (ii) **exterior** a A se existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{a}) \cap A = \emptyset$;
- (iii) **fronteiro** a A se não é interior nem exterior.

O conjunto $\text{int } A$ dos pontos interiores de A diz-se o **interior** de A . O conjunto $\text{ext } A$ dos pontos exteriores de A diz-se o **exterior** de A . O conjunto ∂A dos pontos fronteiros de A diz-se a **fronteira** de A . O conjunto $\bar{A} = \text{int } A \cup \partial A$ diz-se o **fecho** de A . O conjunto A diz-se **aberto** se $A = \text{int } A$, e diz-se **fechado** se $A = \bar{A}$.

3. Uma **sucessão** em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Escrevemos $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k)$.
4. Dizemos que uma sucessão $\mathbf{x}_k$ **converge** para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ (e escrevemos $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$, ou $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$) se

$$\begin{aligned} \forall_{r>0} \exists_{N \in \mathbb{N}} : k > N &\Rightarrow \mathbf{x}_k \in B_r(\mathbf{a}) \\ \Leftrightarrow \forall_{r>0} \exists_{N \in \mathbb{N}} : k > N &\Rightarrow \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < r \\ \Leftrightarrow \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

5. Uma sucessão $\mathbf{x}_k = ((x_1)_k, \dots, (x_n)_k)$ converge para um ponto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ **sse** cada sucessão $(x_i)_k$ converge para a_i ($i = 1, \dots, n$).
6. **Propriedades dos limites de sucessões:** Se $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$ são sucessões convergentes em $\mathbb{R}^n$ e a_k é uma sucessão convergente em $\mathbb{R}$ então:
- (i) $\lim \mathbf{x}_k$ é único;
 - (ii) $\lim (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) = \lim \mathbf{x}_k + \lim \mathbf{y}_k$;
 - (iii) $\lim (a_k \mathbf{y}_k) = (\lim a_k) (\lim \mathbf{y}_k)$;
 - (iv) $\lim (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k) = (\lim \mathbf{x}_k) \cdot (\lim \mathbf{y}_k)$.
7. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é **fechado** **sse** toda a sucessão convergente de termos em A tem limite em A .
8. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existe algum $r > 0$ tal que $A \subset B_r(\mathbf{0})$. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **compacto** se é limitado e fechado.
9. **Teorema de Bolzano-Weierstrass:** Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto **sse** toda a sucessão de termos em A admite uma subsucessão convergente para um ponto de A .

10. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se um **campo escalar**. Uma função $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se um **campo vetorial**. Uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ **contínua** diz-se um **caminho**.
11. O **gráfico** de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é o conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}.$$

O **conjunto de nível** da função f correspondente ao valor $c \in \mathbb{R}^m$ é o conjunto

$$f^{-1}(c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = c\}.$$

12. Dizemos que $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ é o **limite** de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{a} \in \bar{A}$ (e escrevemos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$) se

$$\begin{aligned} & \forall r > 0 \exists \varepsilon > 0 : \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap A \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in B_r(\mathbf{b}) \\ & \Leftrightarrow \forall r > 0 \exists \varepsilon > 0 : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon \text{ e } \mathbf{x} \in A \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < r \\ & \Leftrightarrow \forall \text{sucessão } \mathbf{x}_k \in A \quad \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a} \Rightarrow f(\mathbf{x}_k) \rightarrow \mathbf{b}. \end{aligned}$$

13. **Propriedades dos limites de funções:** Se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções com limite no ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ então:

- (i) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ é único;
- (ii) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = (\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_m(\mathbf{x}))$;
- (iii) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$;
- (iv) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (\varphi(\mathbf{x})f(\mathbf{x})) = (\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \varphi(\mathbf{x})) (\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}))$;
- (v) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = (\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})) \cdot (\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}))$.

14. Diz-se que $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **contínua** no ponto $\mathbf{a} \in A$ se $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. A função f diz-se **contínua** se é contínua em todos os pontos do seu domínio.

15. **Propriedades das funções contínuas:** Se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ então:

- (i) $f = (f_1, \dots, f_m)$ é contínua em $\mathbf{a}$ sse $f_1, \dots, f_m$ são contínuas em $\mathbf{a}$;
- (ii) Se f e g são contínuas em $\mathbf{a}$ então $f + g$ é contínua em $\mathbf{a}$;
- (iii) Se φ e f são contínuas em $\mathbf{a}$ então φf é contínua em $\mathbf{a}$;
- (iv) Se f e g são contínuas em $\mathbf{a}$ então $f \cdot g$ é contínua em $\mathbf{a}$;
- (v) Se f é contínua em $\mathbf{a}$ e h é contínua em $f(\mathbf{a})$ então $h \circ f$ é contínua em $\mathbf{a}$;
- (vi) A função $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ (com $i = 1, \dots, n$) é contínua.

16. **Teorema Weierstrass:** Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f tem máximo e mínimo.

2. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

1. A **derivada** de $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **segundo o vetor** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{a} \in \text{int } A$ é

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} \equiv D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \equiv \partial_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \equiv \nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}).$$

2. A i -ésima **derivada parcial** da função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no ponto $\mathbf{a} \in \text{int } A$ é

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \equiv \partial_i f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{a}).$$

3. A função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se **diferenciável** em $\mathbf{a} \in \text{int } A$ se existe uma transformação linear $Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (representada por uma matriz $m \times n$) tal que

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0},$$

ou, equivalentemente,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h}) \quad \text{com} \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

4. Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \text{int } A$ então f é contínua em $\mathbf{a}$.
 5. Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \text{int } A$ então

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Em particular, Df é representada na base canónica pela **matriz Jacobiana**

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

6. A função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se de **classe** C^1 se todas as suas derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) são funções contínuas no conjunto aberto A .
 7. Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 então f é diferenciável em todos os pontos de A .
 8. Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \text{int } A$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}^l$ é diferenciável em $f(\mathbf{a}) \in \text{int } B$, então $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^l$ é diferenciável em $\mathbf{a}$ e

$$D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a}))Df(\mathbf{a}).$$

Em coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $(y_1, \dots, y_m)$ em $\mathbb{R}^m$ tem-se

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

(**regra da cadeia**).

9. Um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se **tangente** a um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{a} \in M$ se existe um caminho diferenciável $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ e $\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \mathbf{v}$. Um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se **ortogonal** a M no ponto $\mathbf{a}$ se é ortogonal a todos os vetores tangentes a M no ponto $\mathbf{a}$.
 10. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar diferenciável no conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, o seu **gradiente** é o campo vetorial $\text{grad } f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

11. O gradiente de um campo escalar é ortogonal aos seus conjuntos de nível, e indica a direcção de crescimento máximo.

3. Fórmula de Taylor e Extremos

1. **Derivadas parciais de ordem superior:** Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ define-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

A função f diz-se de **classe** C^2 se todas as suas derivadas parciais de segunda ordem são funções contínuas.

2. **Lema de Schwarz:** Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

3. **Fórmula de Taylor de segunda ordem:** Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 e $\mathbf{a} \in \text{int } A$ então

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^t \cdot Hf(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + R_2(\mathbf{h}),$$

onde

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

é a **matriz Hessiana** (simétrica) e

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{R_2(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0.$$

4. Diz-se que $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tem um **máximo local** em $\mathbf{a} \in A$ se existe $r > 0$ tal que $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap A$. O máximo diz-se **global** se $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in A$. As definições de **mínimo local** e **mínimo global** são análogas.
5. Se o campo escalar diferenciável $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tem um extremo local em $\mathbf{a} \in \text{int } A$ então $Df(\mathbf{a}) = 0$.
6. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável. Os pontos $\mathbf{a} \in \text{int } A$ para os quais $Df(\mathbf{a}) = 0$ dizem-se **pontos críticos** (ou **pontos de estacionaridade**) de f . Os pontos críticos que não são extremos locais chamam-se **pontos de sela**.
7. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 e $\mathbf{a} \in \text{int } A$ um ponto crítico de f . Se $Hf(\mathbf{a})$ é:
- (i) **definida positiva** (todos os v.p. > 0) então $\mathbf{a}$ é um ponto de **mínimo local**;
 - (ii) **definida negativa** (todos os v.p. < 0) então $\mathbf{a}$ é um ponto de **máximo local**;
 - (iii) **indefinida** (existem v.p. > 0 e v.p. < 0) então $\mathbf{a}$ é um **ponto de sela**.

Além disso, se $Hf(\mathbf{a})$ é:

- (iv) **semidefinida positiva** (existem v.p. $= 0$ e v.p. > 0) então $f(\mathbf{a})$ **não é máximo local**;
- (v) **semidefinida negativa** (existem v.p. $= 0$ e v.p. < 0) então $f(\mathbf{a})$ **não é mínimo local**.

4. Função Inversa e Função Implícita

1. **Teorema da Função Inversa:** Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\det Df(\mathbf{a}) \neq 0$. Então existem conjuntos abertos $U \ni \mathbf{a}$ e $V \ni f(\mathbf{a})$ tais que $f : U \rightarrow V$ é bijectiva e $f^{-1} : V \rightarrow U$ é de classe C^1 . Além disso, para todo $\mathbf{x} \in U$

$$Df^{-1}(f(\mathbf{x})) = [Df(\mathbf{x})]^{-1}.$$

2. **Teorema da Função Implícita:** Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 e $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ e $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Então existem conjuntos abertos $U \ni \mathbf{a}$ e $V \ni \mathbf{b}$, e uma função $f : U \rightarrow V$ de classe C^1 , tais que

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} \equiv \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}.$$

Além disso,

$$Df(\mathbf{a}) = - \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

5. Extremos Condicionados

1. Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (com $m < n$) uma função de classe C^1 tal que $\text{car } D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = m$. Se $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$ então os vetores tangentes a $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{c}) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\}$ no ponto $\mathbf{a}$ são precisamente os vetores do núcleo de $D\mathbf{F}(\mathbf{a})$.
2. **Teorema dos Extremos Condicionados:** Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $M \subset \mathbb{R}^n$. Se a restrição de f a M tem um extremo local em $\mathbf{a} \in M$ então $\nabla f(\mathbf{a})$ é ortogonal a M no ponto $\mathbf{a}$ (ou seja, é ortogonal a qualquer vetor tangente a M em $\mathbf{a}$).
3. **Regra dos Multiplicadores de Lagrange:** Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (com $m < n$) uma função de classe C^1 e $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\}$. Se a restrição de f a M tem um extremo local em $\mathbf{a} \in M$ e $\text{car } D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = m$ então existem constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (ditas os **multiplicadores de Lagrange**) tais que

$$\nabla(f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

6. Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$

1. $I \subset \mathbb{R}^n$ é um **intervalo** se $I = I_1 \times \dots \times I_n$, onde cada I_k é um intervalo de $\mathbb{R}$. I é limitado/aberto/fechado **sse** cada I_k é limitado/aberto/fechado. Se I é um intervalo compacto com $I_k = [a_k, b_k]$, o seu **volume n -dimensional** é

$$V_n(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Se I é um intervalo limitado, define-se $V_n(I) = V_n(\bar{I})$. Uma **partição** do intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto finito $P = P_1 \times \dots \times P_n$, onde cada P_k é uma partição do intervalo $I_k = [a_k, b_k]$ (i.e., P_k é um subconjunto finito de I_k contendo a_k, b_k). Uma partição de I subdivide I num número finito de subintervalos J_α . Uma função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **função em escada** se existe uma partição P de I tal que s é constante (igual a s_α) no interior de cada subintervalo J_α , sendo o seu **integral** o número real

$$\int_I s = \sum_{\alpha} s_{\alpha} V_n(J_{\alpha}).$$

2. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **limitada**. O **integral superior** de f em I é o número real

$$\overline{\int_I} f = \inf \left\{ \int_I t : t \text{ é em escada e } t(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$

O **integral inferior** de f em I é o número real

$$\underline{\int_I} f = \sup \left\{ \int_I s : s \text{ é em escada e } s(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in I \right\}.$$

A função f diz-se **integrável** (à Riemann) em I se os seus integrais superior e inferior coincidem, e nesse caso define-se o seu **integral** como sendo

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$

As seguintes notações são também utilizadas para o integral de f :

$$\int_I f = \int_I f dV_n = \int_I f(\mathbf{x}) dV_n(\mathbf{x}) = \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

3. Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ tem **conteúdo nulo** se para todo o $\varepsilon > 0$ existe uma família finita de intervalos limitados $\{I_1, \dots, I_N\}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^N I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N V_n(I_k) < \varepsilon.$$

4. **Propriedades de conjuntos de conteúdo nulo:**

- (i) Um subconjunto de um conjunto de conteúdo nulo tem conteúdo nulo.
 - (ii) A união de uma família finita de conjuntos de conteúdo nulo tem conteúdo nulo.
 - (iii) O gráfico de uma função contínua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (onde $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo compacto) tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^{n+1}$.
5. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem conteúdo nulo então f é integrável em I .
6. Se f e g são funções integráveis no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha f + \beta g$, fg e $|f|$ são também integráveis em I e
- (i) $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$;
 - (ii) $f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$;
 - (iii) $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$.
7. **Teorema de Fubini:** Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ e $J \subset \mathbb{R}^m$ intervalos compactos e $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Se cada uma das funções $f_{\mathbf{x}} : J \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_{\mathbf{y}} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ são integráveis então

$$\int_{I \times J} f = \int_I \left(\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_m(\mathbf{y}) \right) dV_n(\mathbf{x}) = \int_J \left(\int_I f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_n(\mathbf{x}) \right) dV_m(\mathbf{y}).$$

8. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo. A **função característica** do conjunto $A \subset I$ é a função $\chi_A : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in A \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin A \end{cases}$$

9. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto. Um conjunto $A \subset I$ diz-se **mensurável** (à Jordan) em I se χ_A é integrável em I , e o **volume n -dimensional** de A é

$$V_n(A) = \int_I \chi_A.$$

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em I , define-se

$$\int_A f = \int_I f \chi_A$$

(portanto $V_n(A) = \int_A 1$).

10. Um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^n$ cuja fronteira tem conteúdo nulo é mensurável.
11. O **centróide** de um conjunto mensurável A é o ponto com coordenadas

$$\bar{x}_k = \frac{1}{V_n(A)} \int_A x_k.$$

12. Se A é mensurável e é dada uma **função densidade de massa** $\rho : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, integrável em A , define-se:

- (i) A **massa** de A :

$$M = \int_A \rho.$$

- (ii) A coordenada k do **centro de massa** de A :

$$x_k^{cm} = \frac{1}{M} \int_A \rho x_k.$$

- (iii) O **momento de inércia** de A em relação ao eixo $\mathbb{R}e_k$:

$$I_k = \int_A \rho \sum_{i \neq k} (x_i)^2.$$

13. O **Jacobiano** da função diferenciável $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função

$$J\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \det D\mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

14. Uma **transformação de coordenadas** é uma função $\mathbf{g} : U \rightarrow V$ (com $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos)

- (i) bijectiva;
- (ii) de classe C^1 ;
- (iii) com inversa de classe C^1 (ou seja, tal que $J\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo o $\mathbf{x} \in U$).

15. **Teorema de mudança de variáveis:** Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos mensuráveis, $g : U \rightarrow V$ uma transformação de coordenadas e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Então

$$\int_V f = \int_U (f \circ g) |Jg|.$$

16. **Coordenadas polares** em $\mathbb{R}^2$: São as coordenadas $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y) pela a mudança de coordenadas

$$(x, y) = g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$Jg(r, \theta) = r.$$

17. **Coordenadas cilíndricas** em $\mathbb{R}^3$: São as coordenadas $(\rho, \varphi, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) pela a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = g(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$Jg(\rho, \varphi, z) = \rho.$$

18. **Coordenadas esféricas** em $\mathbb{R}^3$: São as coordenadas $(r, \theta, \varphi) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y, z) pela a mudança de coordenadas

$$(x, y, z) = g(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$Jg(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta.$$

19. **Integrais impróprios:** Se $A \subset \mathbb{R}^n$ não é limitado e/ou $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ não é limitada mas existem conjuntos mensuráveis $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ tais que $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$, a função $|f|$ é integrável em A_k e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_k} |f| < +\infty$$

então define-se

$$\int_A f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_k} f$$

(pode mostrar-se que este limite não depende da escolha dos conjuntos A_k).

20. **Regra de Leibnitz:** Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \times]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$ existe e é contínua. Então a função $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_I f(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x})$$

é de classe C^1 e

$$F'(t) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x}).$$

7. Integrais de Linha

1. Uma **curva** $C \subset \mathbb{R}^n$ é a imagem de um caminho $\mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Se $\mathbf{g}$ é injetiva então diz-se uma **parametrização** de C . Se C admite uma parametrização de classe C^1 cuja derivada não se anula então C diz-se uma **curva regular simples**.
2. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar contínuo e $C \subset \mathbb{R}^n$ é uma curva regular simples compacta parametrizada por $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ então define-se o **integral de linha** de f ao longo de C através de

$$\int_C f = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) \right\| dt.$$

Esta definição pode ser estendida a **curvas seccionalmente regulares** compactas, isto é, curvas que podem ser decompostas num número finito de curvas simples regulares compactas.

3. Se $C \subset \mathbb{R}^n$ é uma curva seccionalmente regular compacta e é dada uma **função densidade de massa por unidade de comprimento** $\lambda : C \rightarrow \mathbb{R}^+$, define-se:

(i) O **comprimento** de C :

$$l = \int_C 1.$$

(ii) A **massa** de C :

$$M = \int_C \lambda.$$

(iii) A coordenada k do **centro de massa** de C :

$$x_k^{cm} = \frac{1}{M} \int_C \lambda x_k.$$

(iv) A coordenada k do **centróide** de C :

$$\bar{x}_k = \frac{1}{l} \int_C x_k.$$

(v) O **momento de inércia** de C em relação ao eixo $\mathbb{R}e_k$:

$$I_k = \int_C \lambda \sum_{i \neq k} (x_i)^2.$$

4. Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial contínuo e C é uma curva regular simples compacta com parametrização $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ então define-se o **integral de linha** de $\mathbf{F}$ ao longo de C no sentido de $\mathbf{g}$ através de

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) dt.$$

Esta definição pode ser estendida a curvas seccionalmente regulares compactas.

5. O integral de linha depende apenas do sentido em que a parametrização percorre a curva: inverter o sentido corresponde a mudar o sinal.

6. Em Física, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}$ representa o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ ao longo de C no sentido de $\mathbf{g}$, ou seja, a energia transferida pela força $\mathbf{F}$ para uma partícula que percorre a curva C no sentido de $\mathbf{g}$.

8. Campos Gradientes e Campos Fechados

1. **Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:** Se $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1 e C é uma curva parametrizada por $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ então

$$\int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{g} = \phi(\mathbf{g}(b)) - \phi(\mathbf{g}(a)).$$

2. Em Física, uma força da forma $\mathbf{F} = \nabla \phi$ diz-se **conservativa**, e o campo escalar ϕ diz-se um **potencial** para $\mathbf{F}$.
3. Se $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1 e C é uma curva fechada então

$$\oint_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{g} = 0.$$

4. Um campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 diz-se **fechado** se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

(ou seja, se $D\mathbf{F}$ é simétrica).

5. Se $\mathbf{F} = \nabla \phi$ para algum campo escalar $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 então $\mathbf{F}$ é fechado.
6. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **conexo por arcos** se dados dois pontos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ existe um caminho contínuo $\mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow A$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ e $\mathbf{g}(1) = \mathbf{b}$.
7. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo por arcos. Um campo vetorial $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo gradiente em U sse

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = 0$$

para qualquer curva fechada $C \subset U$.

8. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Diz-se que dois caminhos fechados $\mathbf{g}, \mathbf{h} : [a, b] \rightarrow A$ são **caminhos homotópicos** em A se existe uma função contínua $\mathbf{H} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$ (dita uma **homotopia**) tal que $\mathbf{H}(t, 0) = \mathbf{g}(t)$ e $\mathbf{H}(t, 1) = \mathbf{h}(t)$ para todo o $t \in [a, b]$ e $\mathbf{H}(a, s) = \mathbf{H}(b, s)$ para todo o $s \in [0, 1]$.
9. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $C_1, C_2 \subset U$ curvas fechadas com parametrizações homotópicas em U , e $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo fechado. Então

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}.$$

10. Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ é **simplesmente conexo** se A é conexo por arcos e qualquer caminho fechado $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow A$ é homotópico em A a um caminho constante.
11. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto simplesmente conexo e $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo fechado. Então $\mathbf{F}$ é um campo gradiente.

9. Homotopia e Teorema de Green

1. Um **domínio regular** $U \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto limitado cuja fronteira $\partial U = \partial \overline{U}$ é uma união de finitas curvas seccionalmente regulares. A **orientação canónica** de ∂U é o sentido correspondente a parametrizações cuja derivada aponta para U quando rodada de 90° no sentido direto.
2. **Teorema de Green:** Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular e $\mathbf{F} \equiv (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Então

$$\oint_{\partial U} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} \equiv \oint_{\partial U} Pdx + Qdy = \int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$