Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício de Aplicação 3 - Curvas no Espaço

1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização C^3 para a curva (variedade-1) $C \subset \mathbb{R}^3$, $t_0 \in I$ e $s : I \to \mathbb{R}$ dada por

   $$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{g}}(u)\| du$$

   a função comprimento de arco. Mostre que $s(t)$ é invertível e que

   $$\mathbf{t}(s) = \frac{d}{ds}\left[\mathbf{g}(t(s))\right]$$

   é um vector tangente unitário a C.

2. Mostre que

   $$\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = 0.$$

   Define-se a **curvatura** de C no ponto $\mathbf{g}(t(s))$ como sendo

   $$\kappa(s) = \left\|\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)\right\|,$$

   e o **vector normal principal** como

   $$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)$$

   em todos os pontos de C onde a curvatura não se anula.

3. Definimos o **vector binormal** através da fórmula

   $$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

   Mostre que

   $$\mathbf{b}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = 0.$$

   Portanto existe uma função $\tau(s)$, dita a **torção** de C no ponto $\mathbf{g}(t(s))$, tal que

   $$\frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s).$$

4. Mostre que

$$\mathbf{n}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = 0;$$
$$\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\kappa(s);$$
$$\mathbf{b}(s) \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\tau(s);$$

   i.e., que

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s).$$

   Portanto o vector tangente unitário, o vector normal principal e o vector binormal satisfazem as **equações de Frenet-Serret**:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s); \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s); \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s).$$

5. Mostre que uma curva de curvatura zero é um segmento de recta.

6. Mostre que uma curva de torção zero e curvatura constante não nula é um arco de circunferência.

7. Calcule a curvatura e a torção da hélice descrita pela parametrização $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t, ht)$$

   com $r, h > 0$. Mostre que uma curva de torção e curvatura constantes não nulas é um arco de hélice (**teorema de Lancret**).

8. O **raio de curvatura** de C é definido por

$$r(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

   em todos os pontos de C nos quais a curvatura não se anula. Mostre que

$$\ddot{\mathbf{g}}(t) = \dot{v}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{v^2(t)}{r(s(t))}\mathbf{n}(s(t)),$$

   onde $v(t) = \|\dot{\mathbf{g}}(t)\|$. (Note que a fórmula acima dá a habitual decomposição da aceleração nas suas componentes tangencial e centrípeta).

9. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Recorde que $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ têm **contacto de ordem** k em $s_0 \in I$ se são k vezes diferenciáveis em s_0 e $\mathbf{f}^{(i)}(s_0) = \mathbf{g}^{(i)}(s_0)$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Mostre que duas curvas C_1, C_2 possuem a mesma curvatura em $\mathbf{x}_0 \in C_1 \cap C_2$ **sse** têm contacto de segunda ordem quando parametrizadas pelo comprimento de arco. Conclua que o raio de curvatura de uma curva é o raio da única circunferência que tem contacto de segunda ordem com a curva nesse ponto.

10. Mostre que duas curvas C_1, C_2 possuem as mesmas curvatura e torção em $\mathbf{x}_0 \in C_1 \cap C_2$ **sse** têm contacto de terceira ordem quando parametrizadas pelo comprimento de arco. Dê uma interpretação geométrica da torção.