Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício de Aplicação 4 - Geodésicas e Curvatura de Superfícies

1. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície (variedade-2) orientável e $\boldsymbol{\gamma} : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \to S$ (de classe C^2) uma família a um parâmetro de caminhos em S unindo os pontos $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in S$, i.e., tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}(t_0, \alpha) &= \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\gamma}(t_1, \alpha) &= \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$. O comprimento do caminho α é

$$L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t, \alpha)\| \, dt,$$

onde $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t}$. Suponha que existe um caminho de comprimento mínimo, correspondendo a $\alpha = 0$. Mostre que

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t, 0)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t, 0)\|} \right), \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \alpha}(t, 0) \right\rangle dt = 0$$

Sugestão: Derive $L(\alpha)$ e integre por partes.

2. Mostre que o caminho de comprimento mínimo $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t, 0)$ tem que satisfazer

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|} \right) \in T^{\perp}_{\boldsymbol{\gamma}(t)} S$$

para todo o $t \in]t_0, t_1[$. Um caminho satisfazendo esta equação diz-se uma **geodésica** de S.

3. Seja S a superfície de revolução descrita em coordenadas cilíndricas por $r = f(z)$, onde $f : I \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^2 no intervalo aberto I. Mostre que as circunferências correspondentes aos pontos de extremo local de f são geodésicas. Mostre ainda que as secções da superfície por semiplanos de θ constante são também geodésicas. Particularize no caso em que S é uma superfície esférica e a superfície de um toro.

4. Seja $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S. A **aplicação de Gauss** é a aplicação $\mathbf{n} : S \to S^2$ (S^2 designa a superfície esférica de raio 1 em $\mathbb{R}^3$) dada por

$$\mathbf{n}\,(t_1, t_2) = \frac{\partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}}{\|\partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}\|}.$$

Mostre que

$$\langle \mathbf{n}, \partial_1 \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle = 0,$$

e que portanto

$$\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n} = \kappa\,(t_1, t_2)\, \partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}.$$

A função $\kappa\,(t_1, t_2)$ diz-se a **curvatura** de S no ponto $\mathbf{g}\,(t_1, t_2)$.

5. Mostre que

$$|\kappa(t_1,t_2)| = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V_2(\mathbf{n}\circ\mathbf{g}(B_\varepsilon(t_1,t_2)))}{V_2(\mathbf{g}(B_\varepsilon(t_1,t_2)))}.$$

6. Mostre que

$$\partial_i\mathbf{n} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\partial_j\mathbf{g}$$

e que

$$\langle\partial_i\mathbf{n},\partial_j\mathbf{g}\rangle = -\langle\mathbf{n},\partial_i\partial_j\mathbf{g}\rangle.$$

Conclua que

$$(a_{ij})\cdot(g_{jk}) = -(b_{ik}),$$

onde

$$g_{ij} = \langle\partial_i\mathbf{g},\partial_j\mathbf{g}\rangle$$

e

$$b_{ij} = \langle\mathbf{n},\partial_i\partial_j\mathbf{g}\rangle.$$

7. Mostre que

$$\partial_1\mathbf{n}\times\partial_2\mathbf{n} = \det(a_{ij})\,\partial_1\mathbf{g}\times\partial_2\mathbf{g}.$$

Conclua que

$$\kappa(t_1,t_2) = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

8. Seja $M\subset\mathbb{R}^n$ uma variedade-m. Uma função $\mathbf{f}: M\to\mathbb{R}^p$ diz-se **diferenciável** se para qualquer parametrização $\mathbf{g}: V\subset\mathbb{R}^m\to M\cap U$ a função $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}: V\to\mathbb{R}^p$ é diferenciável. Se

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} v_i\partial_i\mathbf{g}\in T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})},$$

define-se

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{m} v_i\partial_i(\mathbf{f}\circ\mathbf{g}).$$

Mostre que esta definição não depende da escolha da parametrização.

9. Define-se a **primeira forma fundamental** $g: T_{\mathbf{x}}M\times T_{\mathbf{x}}M\to\mathbb{R}$ através de

$$g(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle,$$

e a **segunda forma fundamental** $b: T_{\mathbf{x}}M\times T_{\mathbf{x}}M\to\mathbb{R}$ mediante

$$b(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\langle\mathbf{w},\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{n}\rangle.$$

Mostre que escrevendo

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{2} v_i\partial_i\mathbf{g};$$
$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{2} w_i\partial_i\mathbf{g},$$

se tem

$$g(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} v_i w_j;$$

$$b(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} v_i w_j.$$

Conclua que g e b são de facto formas quadráticas (i.e., tensores simétricos). Estes tensores são também conhecidos como o **tensor da métrica** e o **tensor de curvatura extrínseca**.

10. Mostre que a condição para uma curva ser uma geodésica pode ser escrita como

$$\partial_{\mathbf{t}}\mathbf{t} = \lambda\mathbf{n},$$

em cada ponto da curva, onde $\mathbf{t}$ é o vector tangente unitário à curva. Note que $|\lambda|$ é a curvatura da geodésica.

11. Mostre que

$$|b(\mathbf{t},\mathbf{t})|$$

é a curvatura da geodésica de vector tangente $\mathbf{t}$. Mostre que os vectores próprios de (b_{ij}) correspondem às geodésicas de curvatura máxima e mínima (ditas as **curvaturas principais de** S), e que estas são exactamente os módulos dos valores próprios correspondentes. Conclua que o módulo da curvatura é o produto das curvaturas principais. (Isto mostra que o módulo da curvatura não depende da escolha da parametrização).

12. Mostre que se S tem curvatura positiva em $\mathbf{x}_0$ então existe uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$ na qual todos os pontos de M estão do mesmo lado do plano tangente, e que se S tem curvatura negativa em $\mathbf{x}_0$ então em qualquer vizinhança de $\mathbf{x}_0$ existem pontos de M dos dois lados do plano tangente. (Isto mostra que o sinal da curvatura não depende da escolha da parametrização).

13. Calcule a curvatura de uma superfície cilíndrica, de uma superfície cónica, de uma superfície esférica de raio $r > 0$ e da superfície de um toro de raios $R > r > 0$ (esta última apenas nos pontos de intersecção das geodésicas que determinou em 3).

14. As **componentes do tensor de curvatura de Riemann** são dadas pela fórmula

$$R_{ijkl} = \left\langle \partial_i \left(\partial_j \partial_k \mathbf{g}\right)^\top - \partial_j \left(\partial_i \partial_k \mathbf{g}\right)^\top, \partial_l \mathbf{g} \right\rangle,$$

onde $^\top$ designa a projecção no espaço tangente a S. Mostre que

$$R_{ijkl} = b_{il} b_{jk} - b_{ik} b_{jl}.$$