Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício de Aplicação 3 - Curvas no Espaço

1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização C^3 para a curva (variedade-1) $C \subset \mathbb{R}^3$, $t_0 \in I$ e $s : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{g}}(u)\| du$$

a função comprimento de arco. Mostre que $s(t)$ é invertível e que

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d}{ds}\left[\mathbf{g}(t(s))\right]$$

é um vector tangente unitário a C.

2. Mostre que

$$\left\langle \mathbf{t}(s), \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \right\rangle = 0.$$

Define-se a **curvatura** de C no ponto $\mathbf{g}(t(s))$ como sendo

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \right\|,$$

e o **vector normal principal** como

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)$$

em todos os pontos de C onde a curvatura não se anula.

3. Definimos o **vector binormal** através da fórmula

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

Mostre que

$$\left\langle \mathbf{b}(s), \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) \right\rangle = \left\langle \mathbf{t}(s), \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) \right\rangle = 0.$$

Portanto existe uma função $\tau(s)$, dita a **torção** de C no ponto $\mathbf{g}(t(s))$, tal que

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s).$$

4. Mostre que
$$\left\langle \mathbf{n}(s), \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) \right\rangle = 0;$$
$$\left\langle \mathbf{t}(s), \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) \right\rangle = -\kappa(s);$$
$$\left\langle \mathbf{b}(s), \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) \right\rangle = -\tau(s);$$
i.e., que
$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s).$$
Portanto o vector tangente unitário, o vector normal principal e o vector binormal satisfazem as **equações de Frenet-Serret**:
$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s); \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s); \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s).$$

5. Mostre que uma curva de curvatura zero é um segmento de recta.

6. Mostre que uma curva de torção zero e curvatura constante não nula é um arco de circunferência.

7. Calcule a curvatura e a torção da hélice descrita pela parametrização $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\mathbf{g}(t) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t, ht)$$
com $r, h > 0$. Mostre que uma curva de torção e curvatura constantes não nulas é um arco de hélice (**teorema de Lancret**).

8. O **raio de curvatura** de C é definido por
$$r(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$
em todos os pontos de C nos quais a curvatura não se anula. Mostre que
$$\ddot{\mathbf{g}}(t) = \dot{v}(t)\mathbf{t}(s(t)) + \frac{v^2(t)}{r(s(t))}\mathbf{n}(s(t)),$$
onde $v(t) = \|\dot{\mathbf{g}}(t)\|$. (Note que a fórmula acima dá a habitual decomposição da aceleração nas suas componentes tangencial e centrípeta).

9. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Recorde que $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^3$ têm **contacto de ordem** k em $s_0 \in I$ se são k vezes diferenciáveis em s_0 e $\mathbf{f}^{(i)}(s_0) = \mathbf{g}^{(i)}(s_0)$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Mostre que duas curvas C_1, C_2 possuem a mesma curvatura em $\mathbf{x}_0 \in C_1 \cap C_2$ **sse** têm contacto de segunda ordem quando parametrizadas pelo comprimento de arco. Conclua que o raio de curvatura de uma curva é o raio da única circunferência que tem contacto de segunda ordem com a curva nesse ponto.

10. Mostre que duas curvas C_1, C_2 possuem as mesmas curvatura e torção em $\mathbf{x}_0 \in C_1 \cap C_2$ **sse** têm contacto de terceira ordem quando parametrizadas pelo comprimento de arco. Dê uma interpretação geométrica da torção.