Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 7 de Novembro de 2009 - 11h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^5}{x^4+y^4}.$$

(3 val.) 2. Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ e $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ as funções

$$f(t) = (1+t^3, 1+\operatorname{sen} t, \log(1+t)) \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = e^{xyz}-1.$$

Calcule $D(g\circ f)(0)$ e $D(f\circ g)(1,1,0)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade do campo escalar $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definido por

$$h(x,y,z) = 2x - 6y + 6z - x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2.$$

4. Considere o conjunto

$$L = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2+1 \ \text{ e } \ x+2z = 1\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.

(2 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a L no ponto $(-1,1,1)$.

(3 val.) (c) Determine o ponto de L mais afastado da origem.

(2 val.) (d) Mostre que L é o gráfico de uma função $(x,y) = f(z)$ numa vizinhança do ponto $(-1,1,1)$ e calcule $f'(1)$.

(3 val.) 5. Seja $M\subset\mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $x\in\mathbb{R}^n\setminus M$. Mostre que existe um ponto $y\in M$ cuja distância a x é mínima. Mostre ainda que se M é uma variedade então a recta que contém x e y é normal a M em y.