Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXCEPTO MEBIOM, MEFT, LMAC, MEEC E MEAMB
TESTE DE RECUPERAÇÃO 2 - VERSÃO 1 – 26 DE JUNHO DE 2009 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) (1) (a) Mostre que o conjunto
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0,\ y - x = 1\},$$
é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.) (b) Determine o espaço tangente a C no ponto $(1, 2, 1)$.

(2 val.) (c) Mostre que a função $f(x, y, z) = x$ na variedade C tem máximo e mínimo. Determine-os.

(2) Seja
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 - x^2 - z^2 \leq y \leq 4 - x^2 - z^2, x^2 + z^2 < 1\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A na forma $\int \left(\int \left(\int \ldots dy\right) dx\right) dz$

(2 val.) (b) Calcule o momento de inércia de A, em relação ao eixo O_y, sabendo que a densidade de massa de A é $\sigma = 2$.

(2 val.) (3) Calcule $\oint_C F \cdot dg$, onde $F(x, y) = (e^{x^2} + y, e^{y^2} - x)$ e a curva C é a elipse, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1\}$, percorrida no sentido horário.

(4) Considere a superfície
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1, z < 3\},$$
orientada com normal unitária, n_B, com terceira componente negativa.

(2 val.) (a) Calcule a massa de B sabendo que a densidade de massa é $\sigma = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$.

(1 val.) (b) Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ através de B.

(2 val.) (c) Calcule, usando o teorema de Stokes, o fluxo do campo $\mathrm{rot}(G)$ através de B, onde $G = (y, 0, 0)$.

(3 val.) (5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e tal que $f(t, 0) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Mostre, usando o teorema de Fubini, que a função
$$F(x) = \int_0^1 f(t, x)\, dt$$
é diferenciável e a sua derivada é dada por
$$\frac{dF}{dx}(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt.$$
Admita que a função no segundo membro, $g(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt$, é contínua.