DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais 2º Semestre 2016/2017
3 de junho de 2017, às 9:00 Teste 2 versão A

MEFT, MEC, MEBiom, LEGM,
LMAC, MEAer, MEMec, LEAN, LEMat

1. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, indicando os intervalos de existência das respectivas soluções:

[1,0 val] (a) $\varphi' = \dfrac{5t\varphi}{1+t^2} + (1+t^2)^{5/2}, \qquad \varphi(0) = 1\,.$

Resolução

Cálculo da solução geral pela f'ormula da variação das constantes:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= e^{\int \frac{5t}{1+t^2}dt}\left(c + \int e^{-\int \frac{5t}{1+t^2}}(1+t^2)^{5/2}dt\right)\\
&= e^{\frac{5}{2}\ln(1+t^2)dt}\left(c + \int e^{-\frac{5}{2}\ln(1+t^2)dt}(1+t^2)^{5/2}dt\right)\\
&= (1+t^2)^{5/2}\left(c + \int (1+t^2)^{-5/2}(1+t^2)^{5/2}\right)dt\\
&= (1+t^2)^{5/2}(c+t)\,.
\end{aligned}$$

A condição inicial $\varphi(0) = 1$ implica $c = 1$. A solução do problema de valor inicial dado será então

$$\varphi(t) = (1+t^2)^{5/2}(1+t)\,.$$

Esta função está definida em $\mathbb{R}$, e no seu domínio, é diferenciável e satisfaz a equação diferencial, pelo que é uma solução global. Logo, o intervalo máximo de existência é $\mathbb{R}$.

[1,0 val] (b) $\dfrac{dy}{dx} = x^3 e^{x^4+y}, \qquad y(0) = 0\,.$

Resolução

Cálculo da solução geral:

$$\frac{dy}{dx} = x^3e^{x^4+y} \;\Leftrightarrow\; e^{-y}\frac{dy}{dx} = x^3e^{x^4} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}(-e^{-y}) = x^3e^{x^4}$$

$$\Leftrightarrow\; -e^{-y} = \int x^3e^{x^4}dx = \frac{e^{x^4}}{4} + c \;\Leftrightarrow\; y(x) = -\ln\left(-\frac{e^{x^4}}{4} - c\right)\,.$$

A condição inicial $y(0) = 0$ implica $-\frac{1}{4} - c = 1$, ou seja, $c = -\frac{5}{4}$. A solução do problema de valor inicial será então

$$y(x) = -\ln\left(\frac{5}{4} - \frac{e^{x^4}}{4}\right)\,.$$

Calculemos o maior intervalo que inclui zero e onde esta expressão está bem definida:

$$\frac{5}{4} - \frac{e^{x^4}}{4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^4} < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\sqrt[4]{\ln 5}, \sqrt[4]{\ln 5}\right[$$

e, portanto, este será o intervalo de existência procurado.

[1,0 val] 2. (a) Determine a solução geral do sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x.$$

Resolução

O polinómio característico tem raízes $\pm 2i$.

Considerando $\lambda = 2i$, temos que as duas soluções linearmente independentes serão respectivamente a parte real e imaginária da solução complexa $z = e^{2it}v$, onde v é um vector próprio associado ao valor próprio $2i$. O conjunto dos vectores próprios associado a $\lambda = 2i$ é um espaço linear de dimensão 1, gerado por exemplo pelo vector

$$\begin{bmatrix} -(1+i) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução geral do sistema é então dada por

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos(2t + \frac{5\pi}{4}) \\ \cos(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2t + \frac{5\pi}{4}) \\ \mathrm{sen}(2t) \end{bmatrix},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

[1,0 val] (b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sugestão: Encontre uma solução particular constante.

Resolução

Seguindo a sugestão, procuramos uma solução particular da equação não-homogénea que seja constante, e, como tal, satisfaça o sistema

$$0 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

A solução é

$$x_p = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Determinamos agora a solução (única) do problema de valor inicial em $x = x_{\mathrm{h}} + x_p$, onde x_{h} é uma solução da eq. homogénea determinada na alínea anterior. Obtemos $c_1 = 6$ e $c_2 = -2$, pelo que

$$x(t) = \begin{bmatrix} 5 + 6\sqrt{2}\cos(2t + \frac{5\pi}{4}) - 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2t + \frac{5\pi}{4}) \\ -3 + 6\cos(2t) - 2\,\mathrm{sen}(2t) \end{bmatrix}.$$

[2,0 val] 3. Determine a solução geral da equação

$$y''' - 2y'' + 2y' = 4t.$$

Resolução

A equação homogénea pode escrever-se

$$(D^3 - 2D^2 + 2D)y = 0 \Leftrightarrow D(D-1-i)(D-1+i)y = 0,$$

e tem portanto como solução geral

$$y(t) = A + Be^t \cos t + Ce^t\,\mathrm{sen}\, t.$$

Por outro lado, qualquer solução da equação não homogénea satisfaz

$$D^3(D-1-i)(D-1+i)y = 0,$$

e portanto existe uma solução particular da forma $y_p(t) = Et^2 + Ft$. Substituindo na equação obtemos $y_p(t) = t^2 + 2t$, pelo que a solução geral é

$$y(t) = t^2 + 2t + A + Be^t \cos t + Ce^t\,\mathrm{sen}\, t.$$

[1,0 val] 4. (a) Determine a série Fourier da função $f\colon [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 2\pi - x, & \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$$

e que satisfaz $f(-x) = -f(x)$.

Resolução

A função f é ímpar, e portanto a série de Fourier de f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n}{2}x,$$

com

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{n}{2}x\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n}{2}x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \operatorname{sen} \frac{n}{2}x \\ &= \frac{8}{\pi n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Portanto a série de Fourier de f é

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}x.$$

[1,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial com condições na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \operatorname{sen}(x/2), & 0 < x < 2\pi,\ 0 < t, \\ u(t,0) = u(t,2\pi) = 0, & 0 \le t, \\ u(0,x) = f(x), & 0 \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

Resolução

Como a equação diferencial não é homogénea, procuramos uma solução particular estacionária, $v = v(x)$. Obtemos $v''(x) = \operatorname{sen}(x/2)$, e portanto $v(x) = -4 \operatorname{sen} x/2$ é uma solução particular que satisfaz as condições de fronteira. Segue-se que

$$u(t,x) = w(t,x) - 4 \operatorname{sen} x/2$$

é uma solução do problema se e só se

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & 0 < x < 2\pi,\ 0 < t, \\ w(t,0) = w(t,2\pi) = 0, & 0 \le t, \\ w(0,x) = f(x) + 4 \operatorname{sen} x/2, & 0 \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

Separando variáveis, vemos que

$$w(t,x) = T(t) \cdot X(x),$$

satisfaz a equação diferencial e as condições de fronteira se e só se

$$\begin{cases} T' \cdot X = T \cdot X'', & 0 < x < 2\pi,\ 0 < t, \\ T(t) \cdot X(0) = T(t) \cdot X(2\pi) = 0, & 0 \leq t. \end{cases}$$

Segue-se que $X'' + \lambda X = 0$, $T' + \lambda T = 0$ com λ constante. Para obter soluções não nulas que satisfazem $X(0) = X(2\pi) = 0$ devemos escolher $\lambda = n^2/4$. Sobrepondo estas soluções obtemos

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t/4} \operatorname{sen} \frac{n}{2} x.$$

Aplicando $w(0,x) = f(x) + 4 \operatorname{sen} x/2$ obtém-se

$$\begin{aligned} f(x) &= -4 \operatorname{sen} x/2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n}{2} x \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x. \end{aligned}$$

Logo

$$u(t,x) = 4(e^{-t/4} - 1) \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t/4} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x.$$

[2,0 val] 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tal que para $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua se tem

$$\forall_{(t,y)\in(\mathbb{R}^+)^2}, \qquad |f(t,y)| \leq a(t) y\,.$$

Para $(t_0, y_0) \in (\mathbb{R}^+)^2$, diga o que pode afirmar quanto à existência e unicidade locais de solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t,y) \operatorname{arctg} y\,, \qquad y(t_0) = y_0\,.$$

Poderá concluir que o intervalo máximo de existência I_{max} contém $[t_0, +\infty[$?

Resolução

(i) A função $(t, y) \mapsto f(t, y) \operatorname{sen} y$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e, portanto, contínua e localmente Lipschitz relativamente a y, pelo que as hip'oteses do teorema de Picard são satisfeitas para qualquer condição inicial $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e, em particular, para a dada, donde se conclui a existência e unicidade locais de solução para o problema de valor inicial dado.

(ii) $u(t) = 0$, para todo o t, é uma solução da equação diferencial. Logo, se existisse outra solução que assumisse o valor 0 para algum t, existiria um ponto em que a unicidade local assegurada pelo teorema de Picard seria violada, o que seria absurdo. Logo, $y(t)$ será uma função contínua no seu intervalo máximo de existência $I_{max} =]\alpha, \omega[$, que satisfaz $y(t_0) > 0$ e $y(t) \neq 0$, para todo o $t \in I_{max}$. Logo, $y(t) > 0$, para todo o $t \in I_{max}$.

(iii) Pela alínea anterior, $y(t)$ não pode explodir para $-\infty$. Mostremos que não explode em tempo finito, ou seja, não pode ocorrer $\omega < +\infty$ e $y(t) \to +\infty$ quando $t \to \omega^-$. Seja y_a a solução do problema de valor inicial

$$y_a' = \frac{\pi}{2} a(t) y_a, \qquad y_a(t_0) = y_0\,,$$

ou seja, $y_a(t) = y_0 e^{\frac{\pi}{2} \int_{t_0}^{t} a(s) ds}$, definido em todo $\mathbb{R}^+$. Uma vez que,

$$\forall_{(t,y) \in (\mathbb{R}^+)^2} \quad f(t, y) \operatorname{arctg} y \leq \frac{\pi}{2} |f(t, y)| \leq \frac{\pi}{2} a(t) y\,,$$

e que $y(t_0) = y_a(t_0) > 0$, por comparação de soluções concluímos que, para todo $t \in [t_0, \omega[$,

$$0 < y(t) \leq y_a(t)\,.$$

Logo a solução não explode nem para $-\infty$ nem para $+\infty$, pelo que, $\omega = +\infty$, ou seja, $[t_0, +\infty[\subset I_{max}$.

Análise Complexa e Equações Diferenciais 2º Semestre 2016/2017
3 de junho de 2017, às 9:00 Teste 2 versão B

MEFT, MEC, MEBiom, LEGM,
LMAC, MEAer, MEMec, LEAN, LEMat

1. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, indicando os intervalos de existência das respectivas soluções:

[1,0 val] (a) $y' = -\dfrac{3xy}{1+x^2} + (1+x^2)^{-3/2}, \qquad y(0) = 1\,.$

Resolução

$$y = \frac{x+1}{(x^2+1)^{3/2}},$$

Logo, o intervalo máximo de existência é $\mathbb{R}$.

[1,0 val] (b) $\dfrac{d\varphi}{dt} = -te^{t^2+\varphi}, \qquad \varphi(1) = 0\,.$

Resolução

$$\phi = -\log\left(\frac{e^{t^2}+2-e}{2}\right)$$

Logo, o intervalo máximo de existência é $]\sqrt{\log(e-2)}, \infty[$.

[1,0 val] 2. (a) Determine a solução geral do sistema

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} x.$$

Resolução

$$x = \begin{bmatrix} \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ -2\operatorname{sen}(2t) & \operatorname{sen}(2t) + \cos(2t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

[1,0 val] (b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Sugestão: Encontre uma solução particular constante.

Resolução

$$x = \begin{bmatrix} 2 + 5\,\text{sen}(2t) \\ 1 + 5\,\text{sen}(2t) + 5\cos(2t) \end{bmatrix}.$$

[2,0 val] 3. Determine a solução geral da equação

$$y'''' - 4y''' + 5y'' = 10.$$

Resolução

$$c_1 + c_2 t + e^{2t}(c_3 \cos t + c_4\,\text{sen}\,t) + t^2.$$

[1,0 val] 4. (a) Determine a série Fourier da função $f\colon [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

e que satisfaz $f(-x) = f(x)$.

Resolução

A função f é par, e portanto a série de Fourier de f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n}{2}x,$$

com

$$\begin{aligned}
a_0 &= \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\frac{n}{2}x\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos\frac{n}{2}x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)\cos\frac{n}{2}x \\
&= \frac{4}{\pi n^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - (1 + (-1)^n)\right].
\end{aligned}$$

Tem-se $a_{2n+1} = 0$, $a_{4n} = 0$ e $a_{4n+2} = -4/\pi(2n+1)^2$ Portanto a série de Fourier de f é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x.$$

[1,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial com condições na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x, & 0 < x < 2\pi,\ 0 < t, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2\pi) = 0, & 0 \leq t, \\ u(0,x) = f(x), & 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Resolução

Como a equação diferencial não é homogénea, procuramos uma solução particular estacionária, $v = v(x)$. Obtemos $v''(x) = -\cos x$, e portanto $v(x) = \cos x$ é uma solução particular que satisfaz as condições de fronteira. Segue-se que

$$u(t,x) = w(t,x) + \cos x$$

é uma solução do problema se e só se

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & 0 < x < 2\pi,\ 0 < t, \\ \frac{\partial w}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial w}{\partial x}(t,2\pi) = 0, & 0 \leq t, \\ w(0,x) = f(x) - \cos x, & 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Separando variáveis, vemos que

$$w(t,x) = T(t) \cdot X(x),$$

satisfaz a equação diferencial e as condições de fronteira se e só se

$$\begin{cases} T' \cdot X = T \cdot X'', & 0 < x < 2\pi,\ 0 < t, \\ T(t) \cdot X'(0) = T(t) \cdot X'(2\pi) = 0, & 0 \leq t. \end{cases}$$

Segue-se que $X'' + \lambda X = 0$, $T' + \lambda T = 0$ com λ constante. Para obter soluções não nulas que satisfazem $X'(0) = X'(2\pi) = 0$ devemos escolher $\lambda = n^2/4$. Sobrepondo estas soluções obtemos

$$w(t,x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t/4} \cos \frac{n}{2} x.$$

Aplicando $w(0,x) = f(x) - \cos x$ obtém-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n}{2} x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x. \end{aligned}$$

Logo

$$u(t,x) = (1 - e^{-t/4}) \cos x + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t/4} \cos(2n+1)x.$$

[2,0 val] 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tal que para $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua se tem

$$\forall_{(t,y) \in (\mathbb{R}^+)^2}, \qquad |f(t,y)| \leq a(t) y\,.$$

Para $(t_0, y_0) \in (\mathbb{R}^+)^2$, diga o que pode afirmar quanto à existência e unicidade locais de solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t,y) \operatorname{arctg} y\,, \qquad y(t_0) = y_0\,.$$

Poderá concluir que o intervalo máximo de existência I_{max} contém $[t_0, +\infty[$?

Resolução

(i) A função $(t,y) \mapsto f(t,y) \operatorname{sen} y$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e, portanto, contínua e localmente Lipschitz relativamente a y, pelo que as hip'oteses do teorema de Picard são satisfeitas para qualquer condição inicial $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e, em particular, para a dada, donde se conclui a existência e unicidade locais de solução para o problema de valor inicial dado.

(ii) $u(t) = 0$, para todo o t, é uma solução da equação diferencial. Logo, se existisse outra solução que assumisse o valor 0 para algum t, existiria um ponto em que a unicidade local assegurada pelo teorema de Picard seria violada, o que seria absurdo. Logo, $y(t)$ será uma função contínua no seu intervalo máximo de existência $I_{max} =]\alpha, \omega[$, que satisfaz $y(t_0) > 0$ e $y(t) \neq 0$, para todo o $t \in I_{max}$. Logo, $y(t) > 0$, para todo o $t \in I_{max}$.

(iii) Pela alínea anterior, $y(t)$ não pode explodir para $-\infty$. Mostremos que não explode em tempo finito, ou seja, não pode ocorrer $\omega < +\infty$ e $y(t) \to +\infty$ quando $t \to \omega^-$. Seja y_a a solução do problema de valor inicial

$$y_a' = \frac{\pi}{2} a(t) y_a, \qquad y_a(t_0) = y_0\,,$$

ou seja, $y_a(t) = y_0 e^{\frac{\pi}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$, definido em todo $\mathbb{R}^+$. Uma vez que,

$$\forall_{(t,y)\in(\mathbb{R}^+)^2} \quad f(t,y)\,\mathrm{arctg}\, y \leq \frac{\pi}{2}|f(t,y)| \leq \frac{\pi}{2}a(t)y\,,$$

e que $y(t_0) = y_a(t_0) > 0$, por comparação de soluções concluímos que, para todo $t \in [t_0, \omega[$,

$$0 < y(t) \leq y_a(t)\,.$$

Logo a solução não explode nem para $-\infty$ nem para $+\infty$, pelo que, $\omega = +\infty$, ou seja, $[t_0, +\infty[\subset I_{max}$.

[2,0 val] 1. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$2e^x y + (e^x - ye^{-x})\frac{dy}{dx} = 0 \qquad y(0) = 1/2\,.$$

Mostre que a equação diferencial possui um factor integrante na forma $\mu = \mu(x)$ e resolva o problema, indicando o intervalo máximo de existência da solução.

Resolução

A função $\mu(x)$ é um factor integrante daquela equação sse

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)2e^x y) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)(e^x - ye^{-x})) \\
\Leftrightarrow \quad & \mu(x)2e^x = \mu'(x)(e^x - ye^{-x}) + \mu(x)(e^x + ye^{-x}) \\
\Leftrightarrow \quad & \mu'(x)(e^x - ye^{-x}) - \mu(x)(e^x - ye^{-x}) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mu'(x) - \mu(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mu(x) = ce^x\,.
\end{aligned}$$

Um possível factor integrante é então $\mu(x) = e^x$ e, multiplicando a equação diferencial por este factor obtemos a seguinte equação diferencial equivalente a qual sabemos ser exacta:

$$2ye^{2x} + (e^{2x} - y)\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

Logo, procuramos uma função $\Phi(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = 2ye^{2x} \\[2mm] \dfrac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = e^{2x} - y\,. \end{cases}$$

Primitivando a primeira equação obtém-se

$$\Phi(x, y) = ye^{2x} + C(y)\,.$$

Derivando esta expressão em ordem a y e usando a segunda equação,

$$e^{2x} + C'(y) = e^{2x} - y\,,$$

e, logo, $C'(y) = -y$, resultando $C(y) = -\frac{y^2}{2} + c$, onde c é uma constante. Portanto,

$$\Phi(x, y) = -\frac{y^2}{2} + ye^{2x} + c\,.$$

As soluções da equação diferencial são então dadas implicitamente por

$$\frac{y^2}{2} - ye^{2x} - c = 0\,.$$

Usando a condição inicial $y(0) = 1/2$, obtemos

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{3}{8}$$

e, portanto, obtemos a forma implícita que define a solução do problema de valor inicial:

$$\frac{y^2}{2} - ye^{2x} + \frac{3}{8} = 0\,.$$

A solução será dada então por

$$y(x) = e^{2x} - \sqrt{e^{4x} - \frac{3}{4}}\,,$$

onde a escolha da raiz do polinómio do segundo grau em y foi ditada novamente pela condição inicial $y(0) = 1/2$.

Cálculo do intervalo máximo de existência da solução, I:

$$e^{4x} - \frac{3}{4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{4}\ln\frac{3}{4},.$$

Logo,

$$I = \left]\ln\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, +\infty\right[\,.$$

[1,0 val] 2. (a) Determine a solução geral do sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x.$$

RESOLUÇÃO

A matriz do sistema possui dois valores próprios reais e distintos, respectivamente $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Duas soluções linearmente independentes serão $e^{2t}v_1$ e $e^{-2t}v_2$, onde v_1 e v_2 são vectores próprios associados a 2 e -2 respectivamente.

Podemos tomar $v_1 = e_1$ e $v_2 = e_2$ (os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^2$).

Então, a solução geral do sistema homogéneo será

$$x = c_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

[1,0 val] (b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ te^{-2t} \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução

Como

$$F(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

é uma matriz fundamental de soluções e se tem que $F(0) = I$, podemos concluir que $F(t) = e^{At}$ para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Então, $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$, e pela fórmula da variação das constantes podemos concluir que a solução do problema de valor inicial é dada por

$$x = 1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + x_{\mathrm{p}},$$

onde

$$\begin{aligned} x_p &= \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} 2e^{2s} \\ se^{-2s} \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ se^{-2t} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 2e^{2t}s \\ \frac{s^2}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}_{s=0}^{s=t} = \begin{bmatrix} 2e^{2t}t \\ \frac{t^2}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

[2,0 val] 3. Determine a solução geral da equação

$$y''' + 2y'' + y' = e^t.$$

RESOLUÇÃO

A equação homogénea pode escrever-se

$$(D^3 + 2D^2 + D)y = 0 \Leftrightarrow D(D+1)^2 y = 0,$$

e tem portanto como solução geral

$$y(t) = A + Be^{-t} + Cte^{-t}.$$

Por outro lado, qualquer solução da equação não homogénea satisfaz

$$D(D+1)^2(D-1)y = 0,$$

e portanto existe uma solução particular da forma $y_p(t) = Ee^t$. Substituindo na equação obtemos $y_p(t) = \frac{1}{4}e^t$, pelo que a solução geral é

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t + A + Be^{-t} + Cte^{-t}.$$

[1,0 val] 4. (a) Determine a série Fourier da função $f\colon [\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

estude-a quando à convergência pontual em $[-\pi, \pi]$, e calcule

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / (2n+1).$$

RESOLUÇÃO

A série de Fourier de $f(x)$ é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

com

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx \\ &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos(n\pi)}{n}. \end{aligned}$$

Portanto a série de Fourier de f é

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}.$$

Tem-se

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi, \\ 1/2 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi, \end{cases}$$

e a série é periódica de período 2π. Sendo $x = \pi/2$ tem-se

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

e portanto $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

[1,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial com condições na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u, & 0 < x < \pi,\ 0 < t, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0, & 0 \le t, \\ u(0,x) = 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Resolução

Seja $u(t,x) = T(t)\cdot X(x)$. A função u satisfaz a equação diferencial e as condições de fronteira se e só se

$$\begin{cases} T' \cdot X - T \cdot X'' = T \cdot X, & 0 < x < \pi,\ 0 < t, \\ T(t) \cdot X'(0) = T(t) \cdot X'(\pi) = 0, & 0 \leq t. \end{cases}$$

Segue-se que $X'' + \lambda X = 0$, $T' + (\lambda - 1)T = 0$ com λ constante. Para obter soluções não nulas que satisfazem $X'(0) = X'(\pi) = 0$ devemos escolher $\lambda = n^2$. Sobrepondo estas soluções obtemos

$$u(t,x) = a_0 e^t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(1-n^2)t} \cos nx.$$

Aplicando $u(0,x) = 1$ obtém-se

$$1 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Logo

$$u(t,x) = e^t.$$

[2,0 val] 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua não identicamente nula tal que $f(0) = 0$. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = 0\,.$$

Dado $t_1 > 0$, considere o conjunto

$$J(t_1) = \{y \in \mathbb{R} : \text{ existe solução do PVI, } x(t), \text{ tal que } x(t_1) = y\}\,.$$

Mostre que $J(t_1)$ é um intervalo. Indique uma condição adicional que garanta que $J(t_1) = \{0\}$.

RESOLUÇÃO

Uma solução do PVI é $x(t) = 0$, para todo t e, portanto, $0 \in J(t_1)$. Assim, para mostrar que $J(t_1)$ é um intervalo basta mostrar que se existe $y_1 \neq 0$ tal que $y_1 \in J(t_1)$, então, dado um qualquer y entre 0 e y_1, verifica-se $y \in J(t_1)$. Assim, suponhamos que existe $y_1 \in J(t_1) \setminus \{0\}$. Pela definição de $J(t_1)$, existe uma solução do PVI, digamos $\phi(t)$, tal que $\phi(t_1) = y_1$. Mas então, para cada $c \in [0, t_1]$ dado, a função

$$x_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq c, \\ \phi(t-c), & \text{se } c < t \leq t_1 \end{cases}$$

é também uma solução do PVI. Como $\phi(t)$ é diferenciável e, portanto, contínua, pela continuidade da composta de duas funções contínuas, $c \mapsto \phi(t_1 - c)$, ou seja, a correspondência $c \mapsto x_c(t_1)$ é contínua. Como, $x_0(t_1) = y_1$ e $x_{t_1}(t_1) = 0$, pelo teorema de Bolzano, dado qualquer y entre 0 e y_1, existe $c \in [0, t_1]$ tal que, $x_c(t_1) = y$. Logo, $y \in J(t_1)$.

Se f é de classe C^1, o teorema de Picard garante unicidade de solução, e portanto $x(t) = 0$ é a única solução do PVI. Segue-se que com esta condição adicional se tem $J(t_1) = \{0\}$.

Análise Complexa e Equações Diferenciais 2º Semestre 2016/2017
3 de junho de 2017, às 11:30 Teste 2 versão D

MEAmbi, MEBiol, MEEC, MEQ, LEIC

[2,0 val] 1. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$3e^x y + (ye^{-2x} + e^x)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad y(0) = -3/2\,.$$

Mostre que a equação diferencial possui um factor integrante na forma $\mu = \mu(x)$ e resolva o problema, indicando o intervalo máximo de existência da solução.

[1,0 val] 2. (a) Determine a solução geral do sistema

$$x' = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x.$$

[1,0 val] (b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$x' = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3e^{-3t} \\ te^{3t} \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

[2,0 val] 3. Determine a solução geral da equação

$$y''' - 4y'' + 4y' = e^{-t}.$$

[1,0 val] 4. (a) Determine a série Fourier da função $f\colon [\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \pi/2, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

estude-a quando à convergência pontual em $[-\pi, \pi]$, e calcule

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(2n+1).$$

Resolução

A função f é par e a série de Fourier de $f(x)$ é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n+1}^{\infty} a_n \cos nx$$

com

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos nx\, dx\\
&= \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi/2\\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par,}\\ (-1)^m \dfrac{2}{(2m+1)\pi} & \text{se } n = 2m+1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Portanto a série de Fourier de f é

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

Tem-se

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \pi/2,\\ 1/2 & \text{se } x = \pm\pi/2,\\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e a série é periódica de período 2π. Sendo $x = 0$ tem-se

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

e portanto

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

[1,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial com condições na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 1, & 0 < x < \pi,\ 0 < t,\\ u(t,0) = u(t,\pi) = -1, & 0 \le t\\ u(0,x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{2}x - 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Sugestão: Considere uma solução $u(t,x) = v(x) + w(t,x)$, com $\frac{d^2v}{dx^2} = 1$.

Resolução

Seja $u(t,x) = x^2/2 + Ax + B + w(t,x)$. A função u é uma solução do problema se e só se

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\ B + w(t,0) = \pi^2/2 + A\pi + B + w(t,\pi) = -1, \\ x^2/2 + Ax + B + w(0,x) = x^2/2 - \pi x/2 - 1. \end{cases}$$

Escolhendo $B = -1$ e $A = -\frac{\pi}{2}$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0, \\ w(0,x) = 0. \end{cases}$$

Segue-se que $w(t,x) = 0$, donde

$$u(t,x) = x^2/2 - \pi x/2 - 1.$$

[2,0 val] 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua não identicamente nula tal que $f(0) = 0$. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = 0\,.$$

Dado $t_1 > 0$, considere o conjunto

$$J(t_1) = \{y \in \mathbb{R} : \text{ existe solução do PVI, } x(t), \text{ tal que } x(t_1) = y\}\,.$$

Mostre que $J(t_1)$ é um intervalo. Indique uma condição adicional que garanta que $J(t_1) = \{0\}$.