Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 6

1. Suponha que lhe emprestam T euros a um juro anual de $r\%$ (o que corresponde a um juro mensal de $((1+\frac{r}{100})^{\frac{1}{12}}-1)\times 100\%$). O empréstimo deverá ser pago em N prestações mensais todas iguais, a primeira das quais será paga 1 mês depois de lhe ter sido concedido o empréstimo. Qual será o valor da prestação mensal?

2. Determine se as seguintes séries convergem ou não.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^4+n+1}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{n/2}}$; (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2ni}}{n\sqrt{n}}$;

   (v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$; (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{n^3}}$; (vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi/n)}{n^{\log n}}$; (viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cos n}{n^4+1}$.

3. Determine para que valores de z, as seguintes séries convergem absolutamente

   (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$; (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(z^n+z^{-n})$.

4. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n^3}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^{5n}$; (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}(z-i)^n$;

   (iv) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{(in)^n}$; (v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^n z^n$.

5. Se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ tem raio de convergência R, determine os raios de convergência das séries:

   $$\text{a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n^5 z^n; \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^{2n+3}.$$

6. Determine as séries de MacLaurin das seguintes funções indicando o domínio de validade:

(i) $\dfrac{1}{2z+5}$; (ii) $\dfrac{1}{z^4+1}$; (iii) e^{-z^2}; (iv) $\dfrac{z^2}{(1+z)^2}$; (v) $\sin(z^2/3)$;

(vi) $(1+z)e^{-z}$; (vii) $\dfrac{5z-4}{z+2}$; (viii) $\dfrac{1}{z^2-2z-3}$; (ix) $\dfrac{1}{(1-z^3)^2}$.

7. Determine a série de Taylor na vizinhança do ponto z_0, indicando o respectivo domínio de validade:

(i) $\dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1-i$; (ii) $\dfrac{1}{z(z+2)}$, $z_0 = i$;

(iii) $\dfrac{1}{z^3-2z^2+z}$, $z_0 = 2$; (iv) $z\cos(z+1)$, $z_0 = -1$;

(v) $\log(z^2+2z+2)$, $z_0 = -1$ (com $\log$ a função logaritmo determinada pelo valor principal do argumento.)

8. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}.$$

Sem calcular os seus coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z-2$.