Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 14

1. Calcule as transformadas de Laplace das funções definidas em $t \geq 0$ pelas expressões seguintes (onde a, b são números reais).

$$\text{(i)}\ \ \cosh(at); \quad \text{(ii)}\ \ t\sin(at); \quad \text{(iii)}\ \ e^{at}\cos(bt); \quad \text{(iv)}\ \ \frac{\sin t}{t}\,,\ (t>0).$$

2. Determine as funções cujas Transformadas de Laplace são dadas por

$$\text{(i)}\ \ (s^2-1)^{-2}; \quad \text{(ii)}\ \ 6(s^4+10s^2+9)^{-1}; \quad \text{(iii)}\ \ \frac{s+1}{s^2+s-6}; \quad \text{(iv)}\ \ \frac{1}{(s+1)^4}.$$

3. Utilizando a Transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   (i) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

   (ii) $y'' - 2y' + y = te^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

   (iii) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ sendo

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se}\ \ \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{se}\ \ 0 \leq t < \pi\ \ \text{ou}\ \ t \geq 2\pi \end{cases} ;$$

   (iv) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

   (v) $y'' + y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

   (vi) $y''' - y' = h(t) + \delta(t-2\pi)$, $y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$, com

$$h(t) = \begin{cases} \cos t & \text{se}\ \ 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{se}\ \ t \geq \pi \end{cases} .$$

4. Sejam $f, g\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ funções seccionalmente contínuas. O **produto de convolução** de f e g é a função $f * g\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

   (a) Mostre que se f e g têm crescimento sub-exponencial, o mesmo sucede com $f*g$ e

$$\mathcal{L}(f*g) = F(s)G(s).$$

   Portanto o produto de convolução é enviado pela transformada de Laplace no produto usual. **Sugestão:** Faça uma mudança de variável conveniente no integral duplo que calcula $\mathcal{L}(f*g)(s)$.

(b) Aproveite o resultado anterior para calcular $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s^2+1)^2})$.

(c) Confirme o resultado obtido na alínea anterior encontrando um problema de valor inicial para uma equação linear de segunda ordem satisfeito por $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s^2+1)^2})$ e resolvendo-o.

5. Seja k um inteiro maior ou igual a 1. Mostre que se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica de período 2ℓ de classe C^k então existe uma constante M tal que os coeficientes de Fourier da função f satisfazem

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^k} \text{ para } n \geq 0, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^k} \text{ para } n \geq 1$$

Aproveite para concluir que se $k \geq 2$ a série de Fourier converge uniformemente em $[-\ell, \ell]$.

Sugestão: Integração por partes.