Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 11

1. Considere o sistema
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t(1-t)}x + \frac{t}{t-1}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t^2(1-t)}x + \frac{2}{t(t-1)}y \end{cases}.$$
   (a) Determine todas soluções da forma $x(t) = t^\alpha$; $y(t) = t^\beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (b) Determine a solução do problema de valor inicial $x(2) = 0; y(2) = 1$.

2. Encontre a solução geral dos sistemas:
$$\text{(i)} \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3y - 2x \end{cases}; \quad \text{(ii)} \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x + y \end{cases}; \quad \text{(iii)} \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases};$$
$$\text{(iv)} \begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = y - x + z \\ z' = x - z \end{cases}; \quad \text{(v)} \begin{cases} x' = -z \\ y' = y - 4z \\ z' = -4z \end{cases}; \quad \text{(vi)} \begin{cases} x' = -y + 2z \\ y' = -x + 2z \\ z' = -x - y + 3z \end{cases}.$$

3. Seja
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Determine uma solução matricial fundamental e resolva o problema de valor inicial
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = (1, 0, 0).$$

4. Determine a solução geral do sistema
$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \\ \frac{dy_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Sugestão: Note que pode começar por determinar $y_1(t)$.

5. Determine a solução do sistema
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$
que verifica a condição inicial $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1$.
Sugestão: Comece por determinar $x(t)$ e $y(t)$.

6. Justifique que o problema de valor inicial

$$(t^2+y^2)y''' = \operatorname{sen}(t)y'' + e^y, \quad y(0)=1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=3$$

tem uma solução única.

7. Determine a solução geral de cada uma das equações:

   (i) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0$;

   (ii) $(D+2)^2(D^2-2D+5)^3(D-1)y = 0$;

   (iii) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

8. Resolva os problemas de valor inicial:

   (i) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$;

   (ii) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4$;

   (iii) $y''' + 5y'' + y' = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

9. Considere a equação

$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0.$$

   (i) Determine a sua solução geral.

   (ii) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to \infty$.

10. Seja A uma matriz real 2×2 com valores próprios $a \pm bi$, com $b \neq 0$. Mostre que as soluções não nulas do sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

descrevem elipses centradas na origem quando $a = 0$, e espirais centradas na origem quando $a \neq 0$.