Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 10

1. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   diferente da solução $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

2. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2 \end{cases} .$$

   (i) Determine uma solução do PVI, e justifique que existe uma vizinhança de $1/2$ na qual essa solução é única.

   (ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

   (iii) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

3. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \qquad y(0) = 1.$$

   (a) Determine a solução indicando o intervalo máximo de definição.

   (b) Sendo T o operador de Picard associado a este problema e $y_0(t) = 1$. Determine $y_n = T^n(y_0)$ para $n = 1, 2$ e 3.

4. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2) \quad , \quad y(1) = 0,$$

   indicando o seu intervalo máximo de definição.

   (b) Considere agora o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2)e^y \quad , \quad y(1) = 0.$$

   Justifique que a solução deste problema existe e é única e mostre que o intervalo máximo de definição da solução é limitado superiormente.

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Justifique que a solução deste problema existe e é única. Mostre que o intervalo máximo de definição da solução contém $[0, +\infty[$ e determine $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

6. Considere o problema de valor inicial

$$(e^y + \operatorname{sen}^4 y)\frac{dy}{dt} = y - y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Mostre que o intervalo máximo de definição da solução é $\mathbb{R}$ e que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.

7. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = \cos\left(t + e^y\right).$$

   a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial existe e é única.
   b) Mostre que a solução do problema de valor inicial com $y(0) = 0$ satisfaz $|y(t)| \leq |t|$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.
   c) Mais geralmente, para o problema de valor inicial que satisfaz $y(t_0) = y_0$, mostre que

$$|y(t) - y_0| \leq |t - t_0| \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

8. (a) Se $x(t)$ é a solução de uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, determine uma equação satisfeita pela função $y(t) = x(-t)$.

   (b) Sejam $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e considere os problemas de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0; \qquad \frac{dw}{dt} = g(t, w),\ w(t_0) = \|x_0\|.$$

   Use a alínea anterior para mostrar que se

$$g(t, \|x\|) \leq -\|f(t, x)\|$$

   então $\|x(t)\| \leq w(t)$ para todos os valores de $t \leq t_0$ para os quais as soluções estejam ambas definidas.

   (c) Mostre que todas as soluções do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ye^{-x^2} + 1 \\ \frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(xy)x \end{cases}$$

   têm $\mathbb{R}$ como intervalo máximo de definição.