Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXCEPTO MEBIOM, MEFT, LMAC, MEEC E MEAMB
TESTE 2 – 15 DE JUNHO DE 2009 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS – VERSÃO 1

Resolução abreviada

(2 val.) (1) (a) Mostre que a região

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1\},$$

é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução. M coincide com o conjunto de nível zero da função de classe C^1, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1$. A derivada de F, $\nabla F = (\frac{x}{2}, 2y, 2z)$, tem característica um em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$, excepto na origem, $(0, 0, 0)$. Como a origem não pertence a M, $F(0, 0, 0) = -1 \neq 0$, concluímos que M é uma variedade e que $dim(M) = 3 - 1 = 2$.

(2 val.) (b) Determine um vector tangente (não nulo) a M no ponto $(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Resolução. Temos que $(T_{(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})}M)^{\perp} = \mathcal{L}\{(\frac{x}{2}, 2y, 2z)\}|_{(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})} = \mathcal{L}\{(\frac{1}{2}, 1, \sqrt{2})\}$.

Os vectores tangentes a M no ponto $(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ são então dados pelas soluções da equação

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (\frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_1 + u_2 + \sqrt{2}u_3 = 0.$$

Um vector tangente não nulo é, por exemplo, $u = (-2, 1, 0)$.

(2 val.) (c) Determine, caso existam, os extremos da função $f(x, y, z) = x + y$ na variedade M.

Resolução. A variedade M é compacta e a restrição da função f a M, $f|_M$ é contínua pelo que do teorema de Weierstrass concluímos que $f|_M$ tem (pelo menos) um máximo e um mínimo absolutos em M. f é de classe C^1 pelo que os extremos condicionados de f são soluções do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla f & = & \lambda \nabla F \\ F(x,y,z) & = & \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & \lambda \frac{x}{2} \\ 1 & = & \lambda 2y \\ 0 & = & \lambda 2z \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x & = & 4y \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} & - & \\ & - & \\ 5y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

As soluções deste sistema correspondem só a dois pontos, $P_1 = (\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$ e $P_2 = (-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$, pelo que um é o máximo e outro é o mínimo de $f|_M$. Como $f(P_2) = -\sqrt{5} < f(P_1) = \sqrt{5}$, vemos que P_1 é o máximo e P_2 é o mínimo.

(2) Seja

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - 3(x^2 + y^2)}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(a) Escreva uma expressão para o volume de D na forma $\int \left(\int \left(\int \ldots dx\right) dy\right) dz$ (2 val.)

Resolução: Temos que $0 \leq z \leq 2$. Os cortes de D com os planos $z = const$ são dados por

$$\begin{aligned} A_z &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq z^2, x \geq 0, y \geq 0\right\}, \quad \text{se } 0 \leq z \leq 1 \\ A_z &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq \frac{4 - z^2}{3}, x \geq 0, y \geq 0\right\}, \quad \text{se } 1 \leq z \leq 2. \end{aligned}$$

Temos então

$$V_D = \iiint_D 1 = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2 - y^2}} dx\right) dy\right) dz + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4-z^2}{3}}} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4-z^2}{3} - y^2}} dx\right) dy\right) dz.$$

(b) Calcule a massa de D, supondo que a densidade de massa é $\sigma(x, y, z) = z$. (2 val.)

Resolução: Em coordenadas cilíndricas temos

$$\begin{aligned} M_D &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_\rho^{\sqrt{4-3\rho^2}} z \ \rho \ dz d\rho d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho(4 - 3\rho^2) - \rho^3) \ d\rho = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(3) Considere os seguintes campos vectoriais: $H(x, y) = (4xe^{x^2+3y}, 6e^{x^2+3y})$ e $G(x, y) = \left(\frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}, (\frac{-(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)$ e seja C o quadrado com vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$, percorrido no sentido horário.

(a) Calcule $\oint_C \ H \cdot dg$. (1 val.)

Resolução: O campo é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Uma vez que

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = 12x \ e^{x^2+3y} = \frac{\partial H_2}{\partial x},$$

concluímos que H é um campo fechado e como o seu domínio, $\mathbb{R}^2$, é simplesmente conexo concluímos que é um campo gradiente. O integral de um campo gradiente por qualquer curva fechada é zero pelo que $\oint_C \ H \cdot dg = 0$.

(b) Calcule $\oint_C \ G \cdot dg$. (1 val.)

Resolução: O campo G é um campo "ralo da banheira" com centro no ponto $(1,1)$. É de classe C^1 no seu domínio, $D_G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$, e fechado:

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-2(y-1)^2}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} = \frac{(x-1)^2-(y-1)^2}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{-(x-1)^2-(y-1)^2+2(x-1)^2}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} = \frac{(x-1)^2-(y-1)^2}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} = \frac{\partial G_1}{\partial y}.$$

Como D_G não é simplesmente conexo um campo fechado em D_G pode não ser gradiente (como verificaremos agora para este campo). O quadrado C é homotópico em D_G à circunferência

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2+(y-1)^2 = 1\},$$

percorrida no sentido horário. Uma parametrização de Γ é

$$g(s) = (1+\cos(s), 1-\operatorname{sen}(s)), \ \ s \in [0,2\pi],$$

pelo que, aplicando o teorema da homotopia para campos fechados,

$$\oint_C G \cdot dg = \oint_\Gamma G \cdot dg = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}(s), -\cos(s)) \cdot (-\operatorname{sen}(s), -\cos(s)) \, ds = 2\pi.$$

(4) Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1+(x^2+y^2)^2, z < 2\},$$

orientada com normal unitária, n_S, com terceira componente positiva.

(3 val.) (a) Calcule o fluxo do campo $F(x,y,z) = (e^{y^2}, e^{x^2+3z}, 2)$ através de S.

Resolução Calculemos o fluxo pelo teorema da divergência. Consideremos a região

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1+(x^2+y^2)^2 < z < 2 \ \right\},$$

para a qual $\partial D = S \cup T$, onde a "tampa" T é dada por

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 2, x^2+y^2 \leq 1 \ \right\}.$$

Uma vez que $div(F) = 0$ e n_S é a normal unitária interior de S obtemos, do teorema da divergência,

$$0 = \iint_S F \cdot (-n_S) + \iint_T F \cdot n_T \Leftrightarrow \iint_S F \cdot n_S = \iint_T F \cdot n_T = \iint_T 2 = 2 \operatorname{area}(T) = 2\pi.$$

(2 val.) (b) Calcule, usando o teorema de Stokes, o trabalho do campo $G = (y,0,0)$ pela fronteira (bordo) ∂S de S, percorrida no sentido induzido por n_S.

Resolução: Observemos primeiro que o bordo de S coincide com o bordo de T,

$$\partial S = \partial T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = 1, z = 2\right\}$$

orientado no sentido anti-horário para um observador no ponto $(0,0,10)$. Esta orientação corresponde à normal unitária em T usada na alínea anterior, $n_T = (0,0,1)$. Uma vez que $rot(G) = (0,0,-1)$, obtemos

$$\oint_{\partial S} G \cdot dg = \oint_{\partial T} G \cdot dg = \iint_T rot(G) \cdot n_T = \iint_T -1 = -\pi.$$

(5) Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto regular e $\varphi, \psi \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$. Mostre, usando o teorema da divergência, a seguinte identidade (3 val.)

$$\iiint_D (\varphi \ \triangle\psi - \psi \ \triangle\varphi) \ dxdydz = \iint_{\partial D} (\varphi \ \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \ \frac{\partial \varphi}{\partial n}),$$

onde n é a normal unitária exterior de ∂D e $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Resolução: Da identidade $\varphi \ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}$ e de identidades análogas para y e z concluímos que $\varphi \triangle \psi = div(\varphi grad \ \psi) - grad\varphi \cdot grad\psi$ e portanto

$$\varphi\triangle\psi - \psi\triangle\varphi = div\left(\varphi grad \ \psi - \psi grad \ \varphi\right).$$

Então

$$\begin{aligned}\iiint_D (\varphi \ \triangle\psi - \psi \ \triangle\varphi) \ dxdydz &= \iiint_D div\left(\varphi grad \ \psi - \psi grad \ \varphi\right) \ dxdydz = \\ &= \iint_{\partial D} \left(\varphi grad \ \psi - \psi grad \ \varphi\right) \cdot \ n = \\ &= \iint_{\partial D} (\varphi \ \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \ \frac{\partial \varphi}{\partial n}).\end{aligned}$$