

Resumo

Este documento agrupa um conjunto de enunciados e soluções de problemas relevantes para a disciplina de Análise Matemática III do IST. Está a ler a versão produzida em 17 de Setembro de 1999.

A versão mais recente está disponível em

http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/am3sem1/prob_com.ps

http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/am3sem1/prob_com.pdf

A existência de gralhas será inevitável e agradeço a quem mas comunicar para jmatos@math.ist.utl.pt

Neste endereço não haverá resposta directa a quaisquer tipos de dúvidas embora as questões postas possam levar a uma actualização de parte do texto.

Alguns Problemas Comentados de Análise Matemática III

João Palhoto Matos

17 de Setembro de 1999

1 Introdução

No ano lectivo 1996/97 alguns alunos reivindicaram que, a complementar o trabalho das aulas práticas, existissem exemplos de soluções de alguns problemas. Este texto surgiu como uma resposta a esse pedido. Não acredito que o aprender Matemática seja redutível ao estudo de casos típicos de problemas no entanto creio que é lícito ter a noção de como escrever Matemática e qual o conjunto de conhecimentos que se podem admitir como já existentes, algo que espero dê, em geral, uma sensação de maior segurança a quem aprende.

A escolha de problemas corresponde a fornecer soluções e comentários face ao que me pareceu importante depois de muitas sessões de dúvidas e vários exames.

Os exercícios por vezes não aparecem na sua versão original embora o aluno minimamente atento deverá perceber qual a origem. Tal deve-se a tentar definir os métodos a utilizar independentemente do livro de texto, ou *a posteriori* ter decidido que o enunciado original de um exame não me agradava, ou simplesmente não querer fornecer uma solução do original.

Alguns dos problemas têm como fim ilustrar as definições ou resultados e não correspondem ao método mais eficaz de resolver uma questão. Indicações desse tipo aparecem nos comentários.

O texto não pretende ser auto contido e é propositadamente curto (menos de 25 páginas). Recomenda-se a consulta dos livros adoptados nos últimos anos no IST da autoria do Prof. Luís Magalhães [Mag96, Mag93]. A presente versão destas notas procura indicar referências aos resultados mais importantes destes textos como é sugerido neste parágrafo através de uma nota à margem. Obviamente a consulta de outros textos pode ser proveitosa e a bibliografia inclui referências adicionais a alguns clássicos nacionais e estrangeiros [Apo69, Agu73, Apo74]. Obviamente diferem em ênfase, estilo e profundidade.

Textos mais extensos com exercícios e soluções que merecem confiança são, por exemplo, [SG97, Gir96].

A elaboração deste texto teve alguns objectivos secundários:

- Combater a proliferação de cópias não assinadas de soluções de problemas de origem nebulosa e de elevada densidade de disparates pelas quais alguns alunos têm uma apetência inexplicável;
- Testar se a disseminação de material deste tipo via Internet o torna mais acessível e com uma retroacção mais eficaz;
- Testar as tecnologias existentes que associam Matemática e hipertexto.

Por fim faço notar que a partir de Setembro de 1998 este documento passou a ser distribuído electronicamente de duas formas:

Textos base
[Mag96, Mag93]

1. Um ficheiro Postscript (*.ps) adequado para impressão e visionamento sem hipertexto.
2. Um ficheiro Portable Document Format (*.pdf) um documento interactivo que permite efectuar buscas mas que ainda está longe de ter características finais. Este documento foi obtido usando pdftex e é legível usando Acrobat Reader um produto de *Adobe Systems* de distribuição graciosa.

2 Os problemas

2.1 Integrais múltiplos

1 Utilizando directamente a definição de integral de Riemann mostre que a função $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x + y = 1, \\ 0 & \text{se } x + y \neq 1 \end{cases}$$

é integrável em $[0, 1]^2$ e calcule o integral.

Resolução. Considere-se uma qualquer partição P do intervalo $[0, 1]^2$. O ínfimo da função em qualquer subintervalo com interior não vazio definido por P é 0 de maneira que $\int_{[0, 1]^2} f = 0$ pois qualquer um desses subintervalos contém pontos do complementar do segmento de recta que une $(0, 1)$ a $(1, 0)$. O supremo da função em cada um desses subintervalos é 1 se o subintervalo intersecta o referido segmento ou 0 caso contrário. Como a soma dos volumes de tais subintervalos parece poder ser arbitrariamente pequena quando consideramos partições mais finas é natural tentar provar que $\bar{\int}_{[0, 1]^2} f = 0$. Tal implicará que a função é integrável com $\int_{[0, 1]^2} f = 0$.

Tentamos então justificar a afirmação sobre o integral superior. Basta exibir uma sucessão de funções em escada definidas em $[0, 1]^2$, $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tal que $s_k \geq f$ para todo o $k \in \mathbb{N}$ e $\int_{[0, 1]^2} s_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Possíveis s_k podem ser definidos por

$$s_k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \cup_{j=0}^{2^k-1} \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right] \times \left[\frac{2^k-j-1}{2^k}, \frac{2^k-j}{2^k} \right], \\ 0 & \text{nos casos restantes.} \end{cases}$$

Com efeito

$$\int_{[0, 1]^2} s_k = \sum_{j=0}^{2^k-1} 1 \cdot \text{vol} \left(\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right] \times \left[\frac{2^k-j-1}{2^k}, \frac{2^k-j}{2^k} \right] \right) = \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Comentário. O problema destina-se a familiarizar o aluno com o conceito de integral de Riemann e com a notação usada na sua definição. A justificação que tal função é integrável e o cálculo do integral podem ser feitos usando resultados posteriores de uma forma muito mais rápida : a função está definida num intervalo, o seu conjunto de pontos de descontinuidade é o segmento de recta unindo $(0, 1)$ a $(1, 0)$ que tem medida bi-dimensional nula, logo a função é integrável à Riemann, logo também à Lebesgue e no cálculo do integral podemos substituir a função pela função identicamente nula que só difere de f num conjunto de medida nula.

Integral de
Riemann
[Mag96, 5]
Medida nula
[Mag96, 19]

2 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{n} + \frac{\pi}{m} \text{ para alguns } m, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Decida se f é integrável à Riemann em $[0, 1]^2$.

Resolução. Utiliza-se o critério de Lebesgue sobre a integrabilidade à Riemann: “Uma função limitada definida num intervalo compacto é integrável à Riemann sse o seu conjunto de pontos de descontinuidade tiver medida nula.”

Critério de Lebesgue [Mag96, 25]

Vamos então determinar o conjunto dos pontos de descontinuidade de f . Introduzimos a notação $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : \exists m, n \in \mathbb{N} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{n} + \frac{\pi}{m}\}$, $B = [0, 1]^2 \setminus A$. Como as restrições de f a A e a B são funções contínuas os únicos pontos de descontinuidade estarão contidos em $\overline{A} \cap \overline{B}$. Além disso $(x_0, y_0) \in \overline{A} \cap \overline{B}$ será um ponto de descontinuidade sse

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \in A} f(x, y) \neq \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \in B} f(x, y).$$

O conjunto $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A}$ é formado por todas as circunferências centradas em $(0, 0)$ com raios da forma $\frac{1}{n} + \frac{\pi}{m}$ com $m, n \in \mathbb{N}$, ou da forma $\frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$, ou da forma $\frac{\pi}{m}$ com $m \in \mathbb{N}$ e pela origem. Em todos estes pontos os limites considerando restrição a A ou a B são distintos excepto sobre a circunferência de raio 1 centrada em $(0, 0)$ em que ambos os limites são 0. Uma circunferência ou um ponto são conjuntos com medida bidimensional nula. \overline{A} é uma união numerável de tais conjuntos pelo que tem medida nula e podemos concluir que f é integrável à Riemann.

Propriedades de conjuntos com conteúdo ou medida nulos [Mag96, 20-21]

Comentário. O enunciado é uma alteração dum exercício recomendado destinada a evidenciar que a situação no exercício original é um pouco mais simples do que seria razoável esperar em geral (no exercício original tem-se continuidade no único ponto de \overline{A} que não pertence a A e o conjunto dos pontos de descontinuidade é simplesmente A).

Na resolução apresentada várias afirmações são feitas sem uma justificação detalhada. Aconselha-se a verificação daquelas em que haja dúvidas.

3 Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x - 1)^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

e uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em S . Escreva $\iint_S f$ em termos de integrais iteradas da forma

a) $\int(\int \dots dx)dy.$

b) $\int(\int \dots dy)dx.$

c) $\int(\int \dots dr)d\theta$ em que r, θ são as coordenadas polares usais.

Resolução. A região S está esboçada na figura 1.

Os pontos de intersecção das duas circunferências obtêm-se da resolução do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

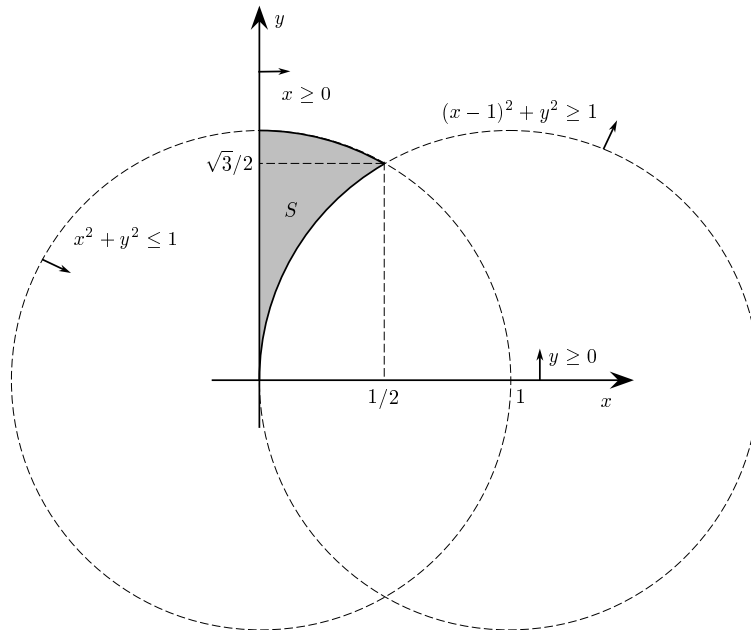


Figura 1: A região S no problema 3.

- a) A solução de $(x-1)^2 + y^2 = 1$ em ordem a x que satisfaz $x < 1$ é $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$. A solução de $x^2 + y^2 = 1$ em ordem a x que satisfaz $x > 0$ é $x = \sqrt{1-y^2}$. Daí que

$$\iint_S f \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \right) dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

- b) A solução de $(x-1)^2 + y^2 = 1$ em ordem a y que satisfaz $y > 0$ é $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$. A solução de $x^2 + y^2 = 1$ em ordem a y que satisfaz $y > 0$ é $y = \sqrt{1-x^2}$. Daí que

$$\iint_S f \, dx \, dy = \int_0^{1/2} \left(\int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

- c) As coordenadas polares usuais podem ser definidas por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

com $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Em coordenadas polares (r, θ) as condições que definem S tomam a forma $\theta \in [\pi/3, \pi/2]$, $r \leq 1$, $r - 2 \cos \theta \geq 0$. O ponto de intersecção das duas circunferências no primeiro quadrante corresponde a $\theta = \pi/3$. Daí que

$$\iint_S f \, dx \, dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\int_{2 \cos \theta}^1 f(r, \theta) r \, dr \right) d\theta.$$

Comentário. Claro que do ponto de vista teórico os resultados que estamos a usar são o teorema de Fubini e o teorema de mudança de variáveis na integração. No entanto a razão básica para incluir este problema foi, mais prosaicamente, chamar a atenção de como descrever uma linha ou uma região num novo sistema de coordenadas.

Teorema de Fubini
[Mag96, 6]
Mudança de variáveis
[Mag96, 73]

4 Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + |y| \leq 1, x + z \leq 1, x \geq 0, z \geq 0\}$ e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Exprima o integral $\iiint_V f$ em termos de integrais iterados

a) $\int \dots (\int \dots (\int \dots f(x, y, z) dz) dy) dx.$

b) $\int \dots (\int \dots (\int \dots f(x, y, z) dx) dy) dz.$

Resolução.

a)

$$\iiint_V f = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} \left(\int_0^{1-x} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

b)

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^{-z} \left(\int_0^{1+y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_0^1 \left(\int_{-z}^z \left(\int_0^{1-z} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \end{aligned}$$

Comentário. Algo que confunde um número considerável de pessoas que pela primeira vez calculam um integral em \mathbb{R}^3 é o estabelecer uma boa estratégia para determinar limites de integração ao integrar em regiões de \mathbb{R}^3 que não são intervalos. Vou tentar sistematizar as duas variantes naturais de raciocínio e exemplificar com este problema. Vamos supor que pretendemos calcular $\iiint_V f$ pela ordem de integração $\int \dots (\int \dots (\int \dots f(x, y, z) dx) dy) dz$. O teorema de Fubini fornece duas possíveis decomposições iniciais em integrais iterados:

Teorema de Fubini
[Mag96, 6]

1. $\iiint_V f = \iint_{\text{proj}_{yz}(V)} \left(\int_{I(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dy dz,$

2. $\iiint_V f = \int_{\text{proj}_z(V)} \left(\iint_{A(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz,$

em que estamos a usar as notações

$$\text{proj}_{yz}(V) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : \exists x \in \mathbb{R} (x, y, z) \in V\},$$

$$\text{proj}_z(V) = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 (x, y, z) \in V\},$$

$$I(y, z) = \{x \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in V\},$$

$$A(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in V\}.$$

Note-se que podemos interpretar $\text{proj}_{yz}(V)$ como a projecção de V no plano yz , $\text{proj}_z(V)$ como a projecção de V no eixo dos z 's, $I(y, z)$ como a intersecção de V com a recta paralela ao eixo dos x 's definida por y e z e $A(z)$ como a intersecção de V com o plano paralelo ao plano xy com cota z . O primeiro passo da determinação dos limites de integração usando cada um destes processos é ilustrado nas figuras seguintes.

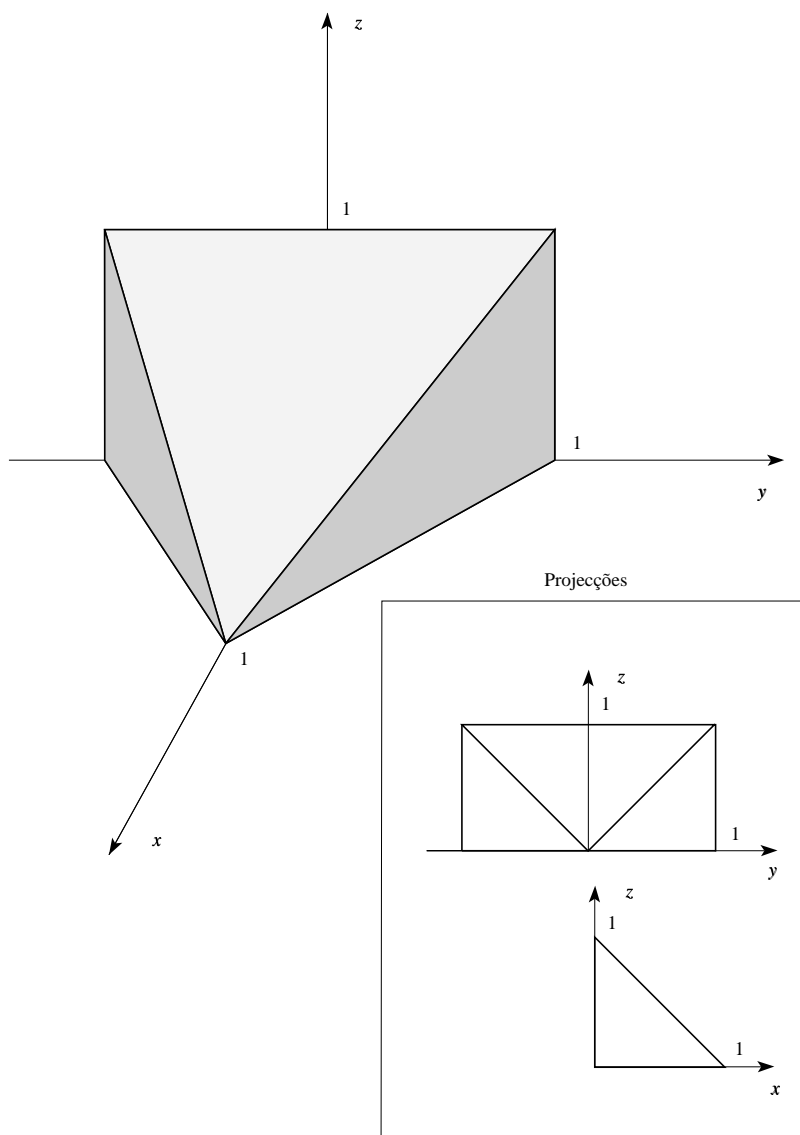


Figura 2: A região V do problema 4 e as suas projeções em dois planos coordenados.

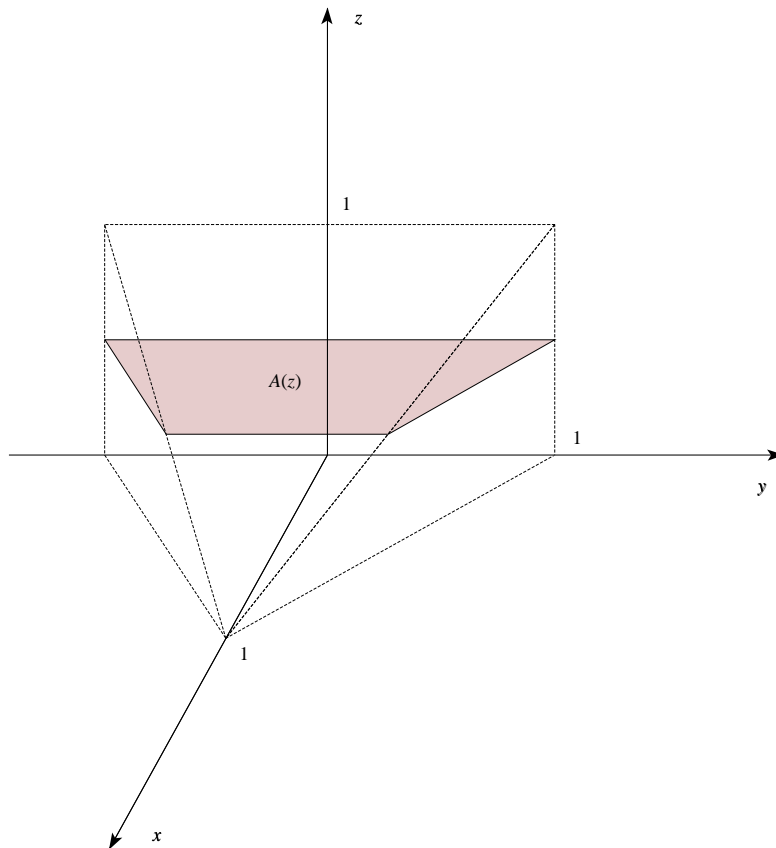


Figura 3: Decompondo $\iiint_V f = \int_{\text{proj}_z(V)} \left(\iint_{A(z)} f \, dx \, dy \right) dz$ no problema 4.

5 Considere

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-3/4} \sqrt{1 - y^2}.$$

Calcule $\iiint_V f$.

Resolução. Consideramos a mudança de variáveis (coordenadas cilíndricas) definida por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

com $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Com estas variáveis V é descrita por $0 \leq r \leq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}$ e o módulo do determinante da matriz jacobiana da

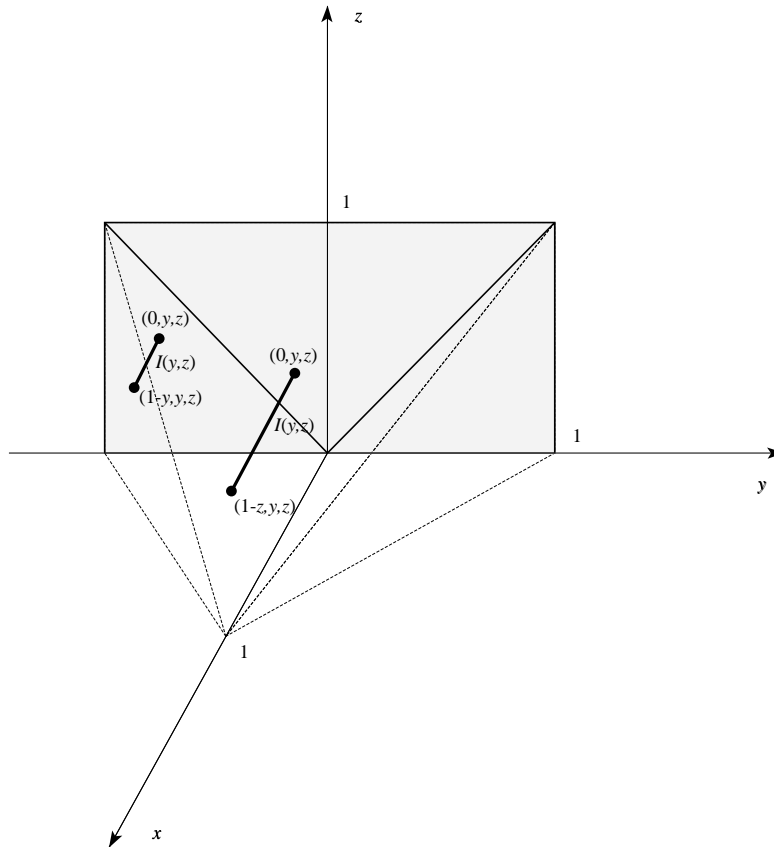


Figura 4: Decompondo $\iiint_V f = \iint_{\text{proj}_{yz}(V)} \left(\int_{I(y,z)} f dx \right) dy dz$ no problema 4.

transformação é r . Daí considerarmos o integral

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} r^{-3/2} \sqrt{1-r^2 \sin^2 \theta} r dz \right) dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^{-1/2} (1 - r^2 \sin^2 \theta) dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^{-1/2} - r^{3/2} \sin^2 \theta dr \right) d\theta \\
 &= 4\pi - 2\pi \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{18}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

Que este cálculo conduz ao resultado desejado é uma consequência, entre outros, do critério de Tonelli, do teorema de Fubini e do teorema de mudança de variáveis de integração.

Comentário. A solução não é obviamente única mas a utilização da transformação de coordenadas indicada ou similar é altamente aconselhável devido à região de integração estar contida no cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ e ao tipo de singularidade da função integranda sobre o eixo dos zz 's.

Teorema de
Tonelli
[Mag96, 68]
Teorema de
Fubini
[Mag96, 67]
Teorema de
mudança de
variáveis
[Mag96, 73]

6 Decida se existem ou não os integrais

a)

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{x(\pi-x)}}{\operatorname{sen} x} dx$$

b)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} 1 - e^{-\frac{1}{x^2 y^2}} dx dy.$$

Resolução.

a) A função integranda, designemo-la por g , não é limitada pelo que o integral não pode estar definido à Riemann. Para investigar a sua existência no sentido de Lebesgue notamos que g é contínua no intervalo aberto limitado $]0, \pi[$ pelo que é mensurável e bastará estudar o comportamento da função “perto” de 0 e “perto” de π . Podemos usar o facto de $g(x) = g(\pi - x)$ para reduzir o estudo ao intervalo $]0, \pi/2[$ via mudança de variáveis.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \sqrt{\pi - x}$ temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/\sqrt{x}}{g(x)} = 1/\sqrt{\pi}.$$

Daí existe $C > 0$ tal que $|g(x)| \leq 1/\sqrt{x}$ para $x \in]0, \pi/2[$. Como se conhece que $\int_0^{\pi/2} 1/\sqrt{x} dx$ existe podemos concluir que a função é integrável.

Mensurabilidade
[Mag96, 56]

b) Se o integral existisse o teorema de Fubini seria aplicável e

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} 1 - e^{-\frac{1}{x^2 y^2}} dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1 - e^{-\frac{1}{x^2 y^2}} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|y|} dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} dx \right) \end{aligned}$$

Teorema de
Fubini
[Mag96, 67]

em que se utilizou a mudança de variáveis $u = xy$ e a existência do integral $\int_{\mathbb{R}} 1 - e^{-1/t^2} dt$. Como o integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|y|} dy$ não existe concluímos que o integral original não existe.

Comentário. Na alínea b) é de notar que o mesmo método mostra que, sendo h uma função integrável em \mathbb{R} que não é 0 quase por toda a parte, a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = h(xy)$ não é integrável em \mathbb{R}^2 .

7 Calcule justificadamente

a)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+t^2} dt$$

b)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+|t|} dt$$

Resolução.

- a) Temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}$ para todo o $t \in \mathbb{R}$. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ é integrável em \mathbb{R} pois se para cada $k \in \mathbb{N}$ definirmos

$$g_k(t) = \begin{cases} g(t), & \text{se } t \in [-k, k], \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

temos $g_k < g_{k+1}$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, $g_k \in L(\mathbb{R})$ pois trata-se de um prolongamento por 0 ao complementar de $[-k, k]$ de uma função integrável à Riemann em $[-k, k]$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k g(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \arctg(k) - \arctg(-k) = \pi$$

o que permite aplicar o teorema da convergência monótona para obter que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi.$$

Teorema da convergência monótona [Mag96, 41]

Isto torna plausível tentar provar que o cálculo possa ser feito por troca entre o limite e o integral. Para tal notamos que se $f_k(t) = \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+t^2}$ cada f_k é contínuo logo mensurável em \mathbb{R} . Além disso temos $f_k \leq g$ com g integrável donde cada $f_k \in L(\mathbb{R})$. Como $f_k \leq f_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, uma nova aplicação do teorema da convergência monótona permite obter que efectivamente

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi.$$

- b) Temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+|t|} = \frac{1}{1+|t|}$ para todo o $t \in \mathbb{R}$. A função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t) = \frac{1}{1+|t|}$ não é integrável em \mathbb{R} pois se fosse integrável definindo para cada $k \in \mathbb{N}$

$$h_k(t) = \begin{cases} h(t), & \text{se } t \in [-k, k], \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

teríamos

$$\int_{\mathbb{R}} h \geq \int_{\mathbb{R}} h_k \geq \int_{-k}^k \frac{1}{1+|t|} dt = 2 \log k \rightarrow \infty$$

quando $k \rightarrow \infty$ o que contradiz ser h integrável. Isto torna plausível tentar provar que o limite é $+\infty$. Com efeito, se fosse finito, poderíamos aplicar o teorema da convergência monótona de forma análoga ao que se fez na alínea anterior para concluir que h era uma função integrável em \mathbb{R} o que, como já vimos, é falso.

Teorema da convergência monótona [Mag96, 41]

8 Calcule justificadamente

$$\lim_{k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos^k(xy)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

Resolução. O limite pontual da função integranda quando $k \rightarrow \infty$ é 0 excepto se $xy = j\pi$ com $j \in \mathbb{Z}$. A equação $xy = j\pi$ com j fixo define uma hipérbole ou a união dos eixos coordenados que são subconjuntos com medida bidimensional nula do plano (no caso $j \neq 0$ pode ser expresso como a união de dois gráficos de funções contínuas definidas em intervalos abertos de \mathbb{R} e com valores em \mathbb{R}). Assim a união numerável

$$\cup_{j \in \mathbb{Z}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = j\pi\}$$

é um conjunto com medida de Lebesgue nula. Daí ser razoável tentar provar que o limite é 0 por aplicação do teorema da convergência dominada. Para tal basta mostrar que cada função integranda é mensurável e que existe uma função integrável em \mathbb{R}^2 que majora o módulo de todas as funções integrandas. A mensurabilidade de todas as funções integrandas segue de todas serem contínuas no aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Finalmente

$$\left| \frac{\cos^k(xy)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{1}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

e afirmamos que a última expressão define uma função integrável em \mathbb{R}^2 . Com efeito, utilizando coordenadas polares, o critério de Tonelli e o teorema de Fubini obtém-se que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} dx dy &= \\ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\rho^2} d\rho \right) d\theta &= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\rho^2} d\rho = 2\pi^2 \end{aligned}$$

em que o último passo pode justificar-se como no exercício 7.a). Assim concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos^k(xy)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = 0.$$

9 Sejam $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e limitada em \mathbb{R} e considere $H(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} g\left(\frac{t}{1+e^{-x^2}}\right) dt$. Mostre que:

- H está bem definida em \mathbb{R} .
- Se g for diferenciável com derivada limitada então H é diferenciável. Obtenha uma expressão integral para H' em termos de g' .
- Mostre que a derivada de H existe mesmo que g não seja diferenciável. Obtenha uma expressão integral para H' em termos de g .

Resolução.

- Como a função g é integrável em \mathbb{R} também é mensurável. Decorre da definição de função mensurável que fixado $\lambda \in \mathbb{R}$ a função $t \mapsto g(\lambda t)$ também é mensurável em \mathbb{R} . Como a função $t \mapsto e^{-t^2}$ é contínua decorre que para cada $x \in \mathbb{R}$ a aplicação $t \mapsto e^{-t^2} g\left(\frac{t}{1+e^{-x^2}}\right)$ é mensurável em \mathbb{R} . Como g é limitada existe uma constante $M > 0$ tal que $|e^{-t^2} g\left(\frac{t}{1+e^{-x^2}}\right)| \leq M e^{-t^2}$. Da integrabilidade de $t \mapsto e^{-t^2}$ em \mathbb{R} decorre que a função integranda é integrável para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Teorema da convergência dominada
[Mag96, 46]

Teorema de mudança de variáveis
[Mag96, 73]
Teorema de Tonelli
[Mag96, 68]
Teorema de Fubini
[Mag96, 67]

Mensurabilidade
[Mag96, 54-56]

- b) Pretendemos aplicar a regra de Leibniz e justificar que a derivada existe para $x \in \mathbb{R}$ e

Regra de Leibniz
[Mag96, 62]

$$H'(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} g' \left(\frac{t}{1+e^{-x^2}} \right) \frac{2txe^{-x^2}}{(1+e^{-x^2})^2} dt.$$

Para tal torna-se necessário mostrar que a função integranda na expressão anterior é mensurável e que existe uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a majora em módulo. A mensurabilidade decorre de um argumento análogo ao da alínea a) e a majoração pode ser

$$\left| e^{-t^2} g' \left(\frac{t}{1+e^{-x^2}} \right) \frac{2txe^{-x^2}}{(1+e^{-x^2})^2} \right| \leq C|t|e^{-t^2}$$

em que se utilizou ser g' limitada e o facto de $\frac{-2xe^{-x^2}}{(1+e^{-x^2})^2}$ ser uma função limitada. Que a função $F(t) = |t|e^{-t^2}$ é integrável em \mathbb{R} decorre, por exemplo, do teorema da convergência monótona considerando

$$F_k(t) = \begin{cases} F(t), & \text{se } t \in [-k, k] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Teorema da convergência monótona
[Mag96, 29]

e notando que cada F_k é integrável, $F_k \leq F_{k+1}$ e

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} F_k(t) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k |t|e^{-t^2} dt = \\ &= 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k te^{-t^2} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} (-e^{-k^2} + 1) = 1. \end{aligned}$$

- c) O argumento da alínea anterior não é agora aplicável devido a g não ser diferenciável. É no entanto possível definir a mudança de variável $u = \frac{t}{1+e^{-x^2}}$ que dá a H a forma

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2} (1+e^{-x^2})g(u) du.$$

Para obter uma expressão integral para H' basta agora aplicar de novo a regra de Leibniz. Temos de forma análoga à da alínea anterior que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2} (1+e^{-x^2})g(u) \right) &= \\ &= g(u) \left(4xe^{-x^2}u^2(1+e^{-x^2})^2 e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2} - 2xe^{-x^2}e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2} \right) \end{aligned}$$

pelo que existem $M, M' > 0$ tais que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2} (1+e^{-x^2})g(u) \right) \right| \leq M(1+u^2)e^{-u^2} \leq M'e^{-u^2/2}.$$

Como o lado direito da última desigualdade é uma função integrável de u em \mathbb{R} e da continuidade (logo mensurabilidade) da derivada decorre a aplicabilidade da regra de Leibniz e

$$H'(x) = 2xe^{-x^2} \int_{\mathbb{R}} g(u)e^{-u^2(1+e^{-x^2})^2} \left(2u^2(1+e^{-x^2})^2 - 1 \right) du.$$

Comentário. A ideia da resolução da alínea (c) é essencialmente a mesma que permite mostrar que a convolução de uma função $f \in L(\mathbb{R})$ como uma função $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ com $g' \in L(\mathbb{R})$ é uma função de classe C^1 com $\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}$, mesmo que f não seja diferenciável.

10 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável, $\lambda > 0$ e

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}.$$

a) Mostre que E_λ é mensurável. **Sugestão:**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(f(x)/\lambda)^{2k}}{(f(x)/\lambda)^{2k} + 1}.$$

b) Suponha que $\int_{E_\lambda} 1 - \int_{E_{\lambda+1}} 1 \geq 1/(1 + \lambda^2)$ para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que f não é integrável em \mathbb{R}^n .

Resolução.

a) O cálculo do limite incluído na sugestão conduz a uma função que iremos designar por g .

$$g(x) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(f(x)/\lambda)^{2k}}{(f(x)/\lambda)^{2k} + 1} = \begin{cases} 1, & \text{se } |f(x)| > \lambda, \\ 1/2, & \text{se } |f(x)| = \lambda, \\ 0, & \text{se } |f(x)| < \lambda. \end{cases}$$

Um conjunto é mensurável se a sua função característica fôr mensurável e sabemos que uma condição suficiente para uma função ser mensurável é ser o limite quase por toda a parte de uma sucessão de funções mensuráveis. O limite calculado não é a função característica de E_λ mas só difere dessa função se $|f(x)| = \lambda$. No entanto reutilizando uma vez mais o mesmo processo

Mensurabilidade
[Mag96, 54-56]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(3g(x)/2)^{2k}}{(3g(x)/2)^{2k} + 1} = \begin{cases} 1, & \text{se } |g(x)| > 2/3, \\ 1/2, & \text{se } |g(x)| = 2/3, \\ 0, & \text{se } |g(x)| < 2/3. \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } |f(x)| > \lambda, \\ 0, & \text{se } |f(x)| < \lambda. \end{cases}$$

o que é exactamente a função característica de E_λ .

Finalmente notamos que uma função da forma $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \frac{(f(x)/\lambda)^{2k}}{(f(x)/\lambda)^{2k} + 1}$ é mensurável pois se obtém por soma, produto e quociente de funções mensuráveis.

b)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f &\geq \int_{\cup_{k=1}^{+\infty} E_k \setminus E_{k+1}} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k \setminus E_{k+1}} f \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k \setminus E_{k+1}} k \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{1+k^2} = +\infty. \end{aligned}$$

11 Considere a transformação de coordenadas definida para $x > 0$ e $y > 0$ por

$$\begin{cases} u = y^2/x \\ v = x^2/y \end{cases}$$

e a região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2, x \leq y \leq 2x^2\}$. Use esta transformação de coordenadas para calcular o integral

$$\iint_A \frac{e^{-x^2/y}}{1 - x^2/y} dx dy. \quad (1)$$

Resolução. Seja $\psi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\psi(x, y) = (y^2/x, x^2/y)$. Esta aplicação transforma arcos de parábolas de equação $y = cx^2$ ou $x = cy^2$ contidos no primeiro quadrante em semi-rectas horizontais ou verticais e a diagonal do primeiro quadrante na diagonal do primeiro quadrante. Em particular (ver fig. 5)

$$\psi(A) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \leq 1, u \geq v, v \geq 1/2\}.$$

A aplicação ψ é obviamente uma bijecção de classe C^1 com matriz jacobiana

$$J_\psi(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y^2/x) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2/x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2/y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2/y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{bmatrix}$$

Teorema de
mudança de
variáveis
[Mag96, 73]

cujos determinante é -3 . Logo o módulo do determinante da transformação inversa é $1/3$. A aplicação da fórmula de mudança de variáveis na integração conduz a

$$\iint_{\psi(A)} \frac{e^v}{1-v} \frac{1}{3} du dv = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{3} \int_{1/2}^1 \left(\int_v^1 \frac{e^v}{1-v} du \right) dv = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{3} \int_{1/2}^1 e^v dv = \frac{1}{3}(e - e^{1/2}).$$

Nota-se que o facto do integral iterado (3) existir implica, pelo teorema de Tonelli, que o integral (2) existe e tem o mesmo valor e isto, pelo teorema de mudança de variáveis, que o integral (1) existe e tem o mesmo valor.

Teorema de
Tonelli
[Mag96, 68]

Comentário. O outro integral iterado de (2) não permite efectuar o cálculo devido a dificuldades de primitivação.

2.2 Variedades e integração em variedades

12 Seja

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z - x^2 - y^2)(y - x^2 - z^2) = 0\}.$$

Identifique uma variedade diferenciável bidimensional desconexa S e uma variedade diferenciável unidimensional conexa e compacta L tais que $Z = S \cup L$. Justifique as afirmações anteriores relativas a conectividade, compacidade e ao facto de S e L serem variedades. Decida justificadamente se Z é ou não uma variedade diferenciável. Calcule o espaço normal a L no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

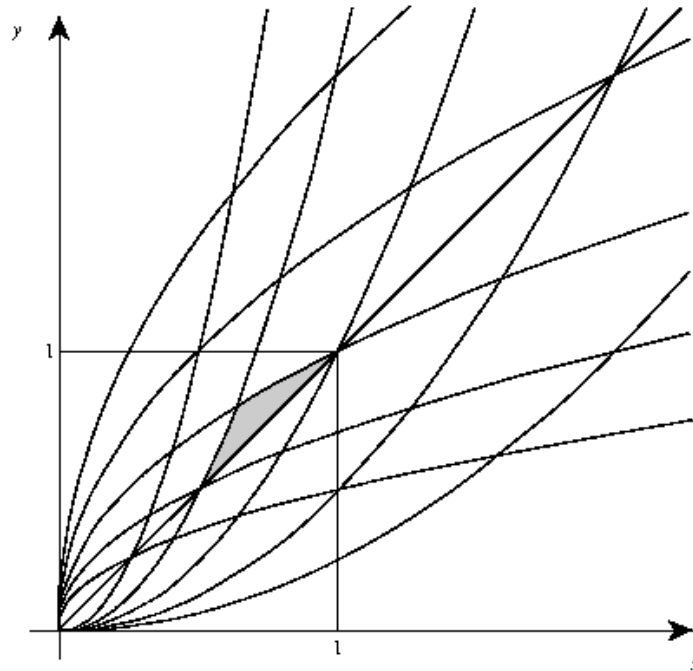


Figura 5: A região de integração e o novo sistema de coordenadas no problema 11

Resolução. Z consiste na união de dois parabolóides com equações $z = x^2 + y^2$ e $y = x^2 + z^2$. Vamos mostrar que L é a intersecção destes dois parabolóides e $S = Z \setminus L$. Mais precisamente, no que diz respeito a L , afirma-se que

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = x^2 + z^2 \end{cases}$$

define uma variedade unidimensional, conexa e compacta, L . Que se trata de uma variedade unidimensional decorre da intersecção dos dois parabolóides ser obviamente não vazia ($(0, 0, 0)$ pertence a L) e da aplicação C^1 definida por $\mathbb{R}^2 \ni (x, y, z) \mapsto (z - x^2 - y^2, y - x^2 - z^2)$ possuir a matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} -2x & -2y & 1 \\ -2x & 1 & -2z \end{bmatrix} \quad (4)$$

cujos subdeterminantes são $-2x(1 + 2y)$, $-2x(1 + 2z)$, $4yz - 1$. Da definição de L decorre que $y \geq 0$, $z \geq 0$ pelo que o anulamento simultâneo dos 3 subdeterminantes implicaria $x = 0$ e $4yz = 1$. A primeira destas condições e a definição de L implicam $z = z^4$, $y = y^4$ o que não é compatível com $4yz = 1$. Assim a matriz jacobiana tem característica máxima, 2, e L é uma variedade-1. Como o conjunto de zeros de uma aplicação contínua é um conjunto fechado obtemos que L é um conjunto fechado. Então, para mostrar que L é compacto, basta provar que é limitado. Notando que da definição de L decorre que para $z \neq 0$

$$1 = \frac{x^2 + y^2}{|z|} \geq \frac{y^2}{|z|} = \frac{(x^2 + z^2)^2}{|z|} \geq |z|^3$$

pelo que a cota z dos pontos de L é limitada. Como da definição de L também decorre $x^2 \leq |z|$ e $y^2 \leq |z|$ obtemos que L é limitado. Para provar que L é conexo mostramos que L é conexo por arcos. Para isso construímos uma parametrização de L . Da definição de L decorre que $z - y = y^2 - z^2$ donde $(z - y)(1 + z + y) = 0$. Como z e y são não negativos podemos concluir que L está contido no plano $z = y$. Escrevemos $\lambda = z = y$ e utilizamos a definição de L para escrever $\lambda = x^2 + \lambda^2$ que é equivalente a $(\lambda - 1/2)^2 + x^2 = 1/4$ a equação de uma circunferência. Isto sugere considerar

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t \\ y = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

com $t \in [0, 2\pi]$. Provamos que L é conexo e adicionalmente identificamos L como sendo uma elipse contida no plano $y = z$ que se projecta no plano xy segundo a circunferência $(y - 1/2)^2 + x^2 = 1/4$ e no plano yz segundo a circunferência $(z - 1/2)^2 + x^2 = 1/4$.

Vamos agora provar que $S = Z \setminus L$ é uma variedade-2 desconexa. Que é desconexa decorre em poder decompor-se em duas componentes não vazias correspondentes aos semi-espacos definidos por $z > y$ e $y > z$ respectivamente (todos os pontos de intersecção com o plano $y = z$ estão em L). Que se trata de uma variedade-2 decorre de numa vizinhança suficientemente pequena de cada ponto de S os pontos de S serem os de um dos parabolóides $z = x^2 + y^2$ ou $y = x^2 + z^2$ e cada um destes parabolóides ser uma variedade-2.

O espaço normal a L no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é gerado pelos vectores linha da matriz (4), isto é,

$$\begin{aligned} N_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(L) = \\ = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : (v_1, v_2, v_3) = \alpha(-1, -1, 1) + \beta(-1, 1, -1); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad (5) \end{aligned}$$

Variedades
diferenciais
[Mag93, 40]

Conjuntos
conexos
[Mag93, 31]

Comentário. A resolução anterior não inclui quaisquer esboços. Obviamente que todos os cálculos apresentados se tornam bastante mais naturais se se esboçar Z .

13 Sejam V_1 e V_2 duas variedades $n - 1$ dimensionais em \mathbb{R}^n . Mostre que se $x_0 \in V_1 \cap V_2$ é tal que os espaços normais, relativos a cada uma das variedades, não são idênticos então existe uma vizinhança W de x_0 tal que $V_1 \cap V_2 \cap W$ é uma variedade $n - 2$ dimensional. Mostre que se os espaços normais coincidirem então podemos ter $V_1 \cap V_2 = \{x_0\}$.

Resolução. Devido a cada V_i ser uma variedade existem abertos W_i e funções $F_i : W_i \rightarrow \mathbb{R}$ com $i = 1, 2$, tais que $x_0 \in W_1 \cap W_2$, cada $F_i \in C^1(W_i)$, $V_i \cap W_i = \{x \in W_i : F_i(x) = 0\}$ e $\nabla F_i(x_0) \neq 0$. Se tomarmos $U = W_1 \cap W_2$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$ temos que U é aberto, $U \cap V_1 \cap V_2 = W_1 \cap W_2 \cap V_1 \cap V_2 = \{x \in U : F(x) = 0\}$ e a matriz jacobiana de F tem a forma

$$\begin{bmatrix} \nabla F_1(x) \\ \nabla F_2(x) \end{bmatrix}.$$

As linhas desta matriz geram os espaços normais a V_1 e V_2 respectivamente que, em x_0 , não são coincidentes. Isto quer dizer que, naquele ponto, as duas linhas da matriz são linearmente independentes. Podemos escolher, por continuidade das derivadas parciais de F , uma vizinhança W de x_0 contida em U em que a independência linear se verifica em todos os pontos de $W \cap V_1 \cap V_2$. O conjunto $W \cap V_1 \cap V_2$ é então uma variedade $n - 2$ dimensional.

Se os espaços normais coincidirem a intersecção pode reduzir-se a um ponto qualquer que seja a dimensão n . Tome-se, por exemplo, $V_1 = \{x = (x_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$, $V_2 = \{x = (x_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n : x_1 = \sum_{i=2}^n x_i^2\}$, $x_0 = 0$.

14 Considere um campo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x, y) = \left(\frac{3x^2y^3}{x^6 + y^6}, -\frac{3x^3y^2}{x^6 + y^6} \right).$$

a) Calcule o integral de linha

$$\int_L F \cdot dr$$

nos seguintes casos:

a.1) L a linha definida pelo caminho $r(t) = (\cos^{1/3} t, \sin^{1/3} t)$ com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

a.2) L o segmento de recta orientado unindo $(1, 0)$ a $(0, 1)$.

b) Decida se F é ou não um gradiente de um potencial em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Resolução.

a.1) Calculamos directamente o integral de linha notando que

$$r'(t) = \frac{1}{3} \left(-\cos^{-2/3} t \sin t, \sin^{-2/3} t \cos t \right),$$

$$F(\cos^{1/3} t, \sin^{1/3} t) = \left(3 \cos^{2/3} t \sin t, 3 \cos t \sin^{2/3} t \right),$$

pelo que

$$\int_L F \cdot dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

Espaços tangente
e normal
[Mag93, 54]

Integrais de linha
[Mag93, 15]

- a.2) Investigamos a possibilidade do integral de linha do campo F ser independente do caminho. Para isso verificamos se F é ou não um campo fechado

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{3x^3y^2}{x^6+y^6} \right) = -\frac{9x^2y^2(x^6+y^6) - 18x^8y^2}{(x^6+y^6)^2} = \frac{9(x^8y^2 - x^2y^8)}{(x^6+y^6)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3x^2y^3}{x^6+y^6} \right)$$

Campos
gradiente
[Mag93, 24, 136]

pelo que F é fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Como este conjunto não é simplesmente conexo não temos à nossa disposição uma condição suficiente que nos garanta que F é um gradiente. No entanto podemos recorrer, por exemplo, ao subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 definido por $x+y > 1/2$, este sim simplesmente conexo, para garantir que os valores dos integrais de linha na alínea a.1) e a.2) são idênticos.

- b) Considere-se a linha C parametrizada por $\alpha(t) = (\cos^{1/3} t, \sin^{1/3} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Um cálculo análogo ao realizado na alínea a.1) conduz a

$$\int_C F \cdot d\alpha = 2\pi$$

pelo que F **não** é um gradiente em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

15 Considere um campo $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$G(x, y, z) = (yze^{x^2+z^2}, xze^{x^2+y^2}, xye^{y^2+z^2}).$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo G através da variedade-2 S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Arbitre o sentido da normal a S .

Resolução. Utilizamos o teorema de Stokes para transformar o fluxo do rotacional num integral de linha do campo sobre o bordo de S , ∂S . Orientações compatíveis da normal unitária a S e do sentido em que se percorre ∂S para cálculo do integral de linha estão esquematizados na figura 6. O bordo de S é formado por 3 arcos de circunferência cada um dos quais sobre um plano coordenado. Se T designar um vector tangente ao bordo temos $G(x, y, 0) \cdot T(x, y, 0) = G(x, 0, z) \cdot T(x, 0, z) = G(0, y, z) \cdot T(0, y, z) = 0$ nos pontos em que T está definido pelo que

$$\int_S \text{rot } G \cdot \nu dS = \oint_{\partial S} G \cdot dr = 0.$$

Comentário. Uma das muitas aplicações do teorema fundamental do cálculo ou de um dos seus corolários (neste caso o teorema de Stokes), porventura a mais elementar, consiste em calcular um dos lados da igualdade estabelecida no teorema usando o cálculo do integral no outro lado da igualdade sempre que tal se afigure mais simples. Quando é que se deve ou não tirar partido desta possibilidade é algo que só alguma prática permite responder.

Teorema de
Stokes
[Mag93, 118]

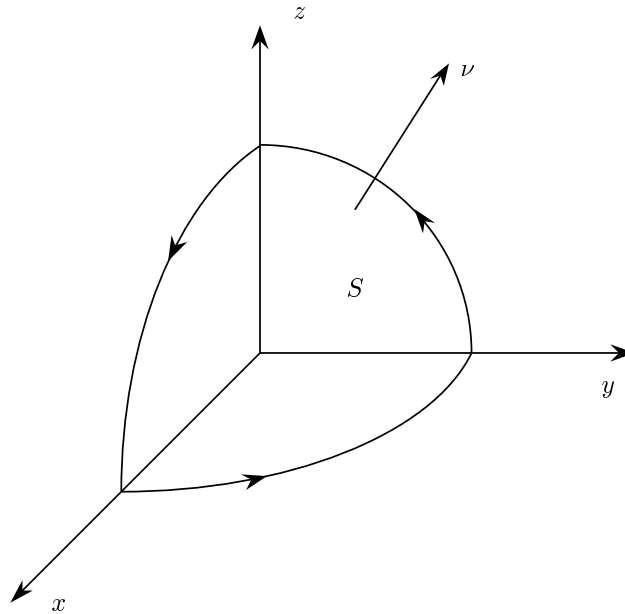


Figura 6: Esta figura acompanha o problema 15

16 Considere a região $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$ e um campo $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $H(x, y, z) = x + yze^{y-z}$. Calcule

$$\iint_{\partial D} H \nu_1 dS$$

em que $\nu \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ é a normal unitária exterior a ∂D , a fronteira de D , nos pontos em que está definida e dS designa o elemento de volume bidimensional.

Resolução. O integral a calcular pode ser interpretado como o fluxo de um campo vectorial $\bar{H}(x, y, z) = (H(x, y, z), 0, 0)$ através de ∂D . Isto permite usar o teorema da divergência para calcular

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} H \nu_1 dS &= \iint_{\partial D} \bar{H} \cdot \nu dS = \iiint_D \operatorname{div} \bar{H} dx dy dz = \iiint_D \frac{\partial H}{\partial x_1} dx dy dz \\ &= \iiint_D 1 dx dy dz = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Teorema da
divergência
[Mag93, 104]

Comentário. O tema deste exercício é análogo ao do exercício 15. O teorema da divergência é usado para simplificar consideravelmente o cálculo.

17 Sejam $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$, $T : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Suponha-se que T é uma aplicação contínua e que $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Para $x \in \mathbb{R}^3$, $\nu \in S^2$, $h, r > 0$ considere todos os conjuntos da forma

$$C_{x,\nu,h,r} = \{y \in \mathbb{R}^3 : |(y-x) \cdot \nu| \leq h, |y-x - ((y-x) \cdot \nu)\nu| \leq r\},$$

isto é, todos os “cilindros” centrados em x , eixo de simetria ν , altura $2h$ e raio da base r . Mostre que se para qualquer destes cilindros tivermos

$$\iint_{\partial C_{x,\nu,h,r}} T(n, y) \cdot n(y) dV_2(y) = \iint_{\partial C_{x,\nu,h,r}} g(y) \cdot n(y) dV_2(y),$$

com $\partial C_{x,\nu,h,r}$ a fronteira do cilindro e $n(y)$ a respectiva normal exterior nos pontos em que está definida, então $T(-n, x) \cdot n = -T(n, x) \cdot n$ para todo o $n \in S^2$ e todo o $x \in \mathbb{R}^3$.

Resolução. A aplicação do teorema da divergência ao integral envolvendo g em cada um dos cilindros $C_{x,\nu,h,r}$ conduz à identidade

$$\iint_{\partial C_{x,\nu,h,r}} T(n, y) \cdot n(y) dV_2(y) = \iiint_{C_{x,\nu,h,r}} \operatorname{div} g(y) dy. \quad (6)$$

Convencionamos

$$\begin{aligned} D_{x,\nu,h,r}^+ &= \{y \in \mathbb{R}^3 : (y-x) \cdot \nu = h, |y-x - ((y-x) \cdot \nu)\nu| \leq r\}, \\ D_{x,\nu,h,r}^- &= \{y \in \mathbb{R}^3 : (y-x) \cdot \nu = -h, |y-x - ((y-x) \cdot \nu)\nu| \leq r\}, \\ S_{x,\nu,h,r} &= \{y \in \mathbb{R}^3 : |(y-x) \cdot \nu| \leq h, |y-x - ((y-x) \cdot \nu)\nu| = r\}. \end{aligned}$$

Se fizermos $r \rightarrow 0$ notamos que, usando a continuidade de T , um argumento análogo ao do lema de localização garante que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_{x,\nu,h,r}^+} T(n, y) \cdot n(y) dV_2(y) &= T(\nu, x) \cdot \nu, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_{x,\nu,h,r}^-} T(n, y) \cdot n(y) dV_2(y) &= -T(-\nu, x) \cdot \nu. \end{aligned}$$

Por outro lado escolhemos $h = r^3$ e consideramos $y \in B_1(x)$, $n \in S^2$. As funções T e $\operatorname{div} g$ são limitadas para y e n satisfazendo as restrições anteriores. Tal é uma consequência de S^2 e $\overline{B}_1(x)$ serem compactos, T ser contínua e g ser de classe C^1 . Assim podemos estabelecer para uma constante conveniente $C > 0$

$$\begin{aligned} \left| \iint_{S_{x,\nu,h,r}} T(n, y) \cdot n(y) dV_2(y) \right| &\leq Cr^3 \\ \left| \iiint_{C_{x,\nu,h,r}} \operatorname{div} g(y) dy \right| &\leq Cr^5 \end{aligned}$$

Assim dividindo ambos os membros de (6) por r^2 e fazendo $r \rightarrow 0$ obtém-se a identidade desejada.

Comentário. O argumento utilizado, baseado na ideia do lema de localização e usando diferentes “taxas de variação” da altura e raio da base do cilindro, é inspirado por aplicações de procedimentos análogos em Mecânica dos Meios Contínuos, Electromagnetismo, . . . , em que se obtêm restrições a certos campos à custa das leis de conservação por eles satisfeitas, quer na forma de equações diferenciais parciais quer de relações algébricas. Comparar com [Mag93, 150-154].

Lema de
localização
[Mag93, 108]

18 Decida se o campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + 2xy + 2y^2}, \frac{-x}{x^2 + 2xy + 2y^2} \right)$$

é ou não um gradiente em

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Resolução.

- O semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ é um conjunto aberto em estrela e o campo é de classe C^1 de maneira que basta verificar se o campo é ou não fechado. Isso resulta de

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + 2xy + 2y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + 2xy + 2y^2} \right).$$

- Como $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ não é um conjunto em estrela não podemos aplicar o critério usado na alínea anterior. Testamos o integral ao longo de um caminho fechado que limite uma região contendo a origem para investigarmos o que se passa. Consideramos então um exemplo particularmente simples de uma tal linha. Seja $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ definindo uma linha L . Temos então

$$\begin{aligned} \oint_L F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos^2 t + 2 \cos t \sin t + 2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-1}{(\cos t + \sin t)^2 + \sin^2 t} dt < 0. \end{aligned}$$

Se o campo fosse um gradiente no conjunto em consideração o integral deveria ser 0 pelo que podemos concluir que o campo não é gradiente.

Campos
gradiente
[Mag93, 24, 136]

Comentário. Poderia ter-se invocado a noção de conjunto simplesmente conexo na alínea (a) e o resultado análogo para esta classe de conjuntos. Claro que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ não é simplesmente conexo.

Referências

- [Agu73] F. Dias Agudo. *Lições de Análise Infinitesimal*, volume II. Cálculo integral em \mathbb{R}^n . Escolar Editora, Lisboa, 1973.
- [Apo69] Tom M. Apostol. *Calculus*, volume II. John Wiley, New York, 1969.
- [Apo74] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, New York, 1974.
- [Gir96] Pedro Girão. *Resoluções de Exames de Análise Matemática III*. IST, 1996.
- [Mag93] Luís Magalhães. *Integração em Variedades e Aplicações*. Texto Editora, Lisboa, 1993.
- [Mag96] Luís Magalhães. *Integrais Múltiplos*. Texto Editora, Lisboa, segunda edição, 1996.
- [SG97] João Santos e Diogo Gomes. *Problemas de Análise Matemática*. IST, 1997.

Índice

- campo
 - fechado, 18
- conjunto
 - compacto, 4, 16
 - fechado, 16
 - simplesmente conexo, 18
- convolução, 14
- critério
 - de Lebesgue, 4
 - de Tonelli, 10
- funções
 - em escada, 3
- integrabilidade
 - à Lebesgue, 4, 10
 - à Riemann, 4
- integral
 - de Riemann, 3
 - superior, 3
- lema
 - de localização, 21
- medida
 - nula, 4, 12
- partição, 3
- sistema de coordenadas, 6
- teorema
 - da convergência dominada, 12
 - da divergência, 20
 - de Fubini, 6
 - de mudança de variáveis na integração, 6
 - de Stokes, 19
- transformação de coordenadas, 15
- variedade, 16, 17, 19