1 Introdução

Este documento contém algumas indicações de resolução do 1º teste de Análise Matemática III para os cursos de Matemática e Física no 1º semestre de 1999/2000. Não se deve inferir que as indicações apresentadas são únicas ou completas. Optei por apresentar soluções para a versão corrigida do enunciado disponível em

`http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/AMIII/exames/AMIII99T1.pdf`

Como é sabido a pergunta 4.a) tinha uma gralha que impossibilitava a sua solução e a 3.b) tinha outra gralha que não afectava a possibilidade de resolver a questão simplificando-a ligeiramente.

2 Indicações para resolução

1. (a) Se no sistema de estacionaridade uma das equações for multiplicada por x e a outra por y e subtraídas termo a termo é possível concluir que todas as soluções que não se encontram sobre os eixos coordenados devem verificar $x = y$. Obtida esta informação é fácil concluir que os únicos pontos de estacionaridade são $(0, 0)$, $(1/2, 1/2)$ e $(1, 1)$. Da definição da função é fácil concluir que o primeiro e o último são pontos de sela e usando o teorema de Weierstrass aplicado à restrição da função ao conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ que o segundo é um ponto de máximo local. Alternativamente podem ser usados critérios baseados na análise do termo de segunda ordem da fórmula de Taylor.

   (b) O limite indicado caracteriza o resto de sexta ordem da fórmula de Taylor. Esta coincide com o argumento do sen. Detalhes para problemas similares estão abundantemente exemplificados no texto.
   `http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/AMIII/temp.pdf`

2. O esboço da região apresenta-se na figura 1. Note para esboçar a região de integração que, se $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, então $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq x + y + z$ e que para x fixo a função $y \mapsto (1 - \sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ é côncava. Para obter uma soma de integrais iterados que representa o integral, via teorema de Fubini integrando primeiro em ordem a x, note que terá que usar limites de integração distintos consoante uma recta paralela ao eixo dos x intersecta uma das regiões

$$\begin{aligned} C =& \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 1, \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 1\}, \\ B =& \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}. \end{aligned}$$

Designando $\hat{C} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (0, y, z) \in C\}$, $\hat{B} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (0, y, z) \in B\}$ temos

$$\iiint_A h\, dx\, dy\, dz = \iint_{\hat{B}} \left(\int_{(1-\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}^{1-y-z} h\, dx \right) dy\, dz + \iint_{\hat{C}} \left(\int_0^{1-y-z} h\, dx \right) dy\, dz$$

Deixa-se ao leitor a determinação dos limites de integração para $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

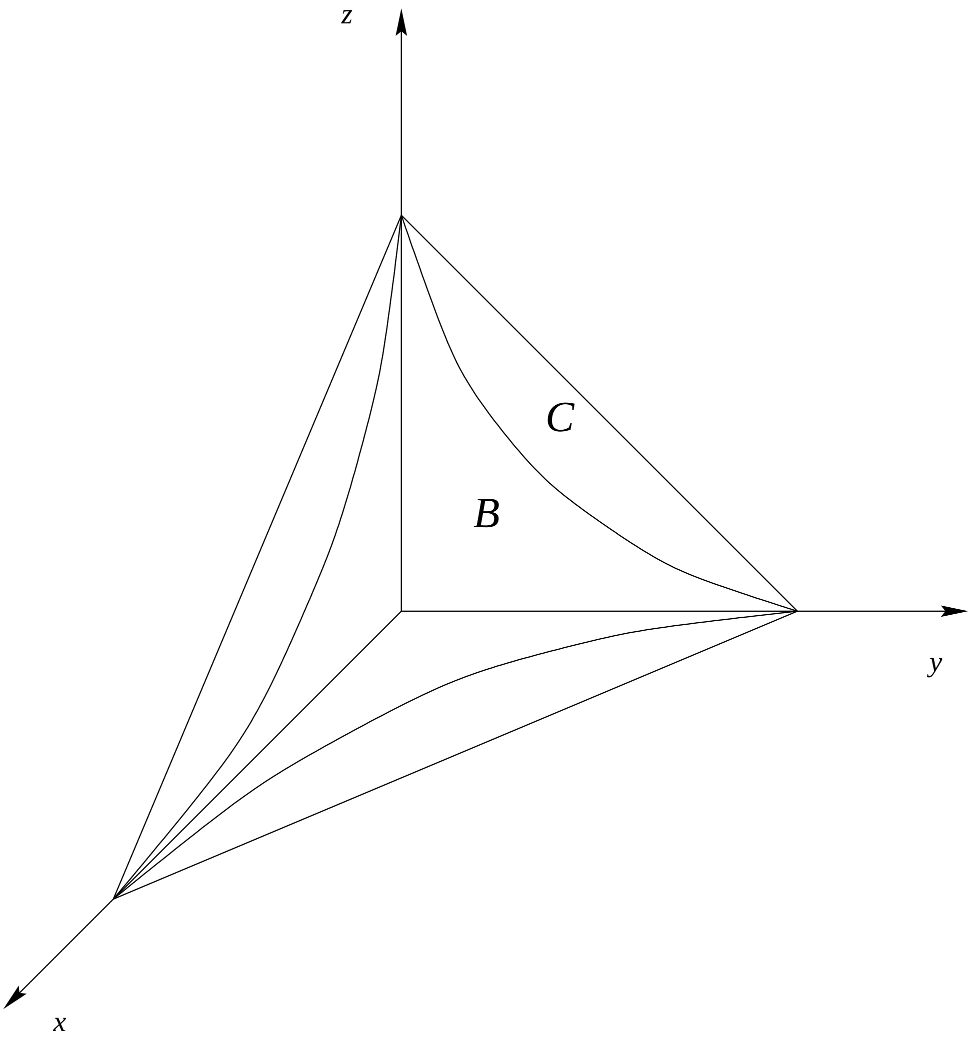

Figura 1: A região de integração no problema 2.

3. (a) Admitindo por um momento que é possível trocar o integral com o limite verifica-se que o limite pontual quase por toda a parte das funções integrandas é a função $[1,+\infty[^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \equiv \frac{1}{x^2y^3}$. O limite não existe ou é 0 sobre uma família numerável de semi-rectas que tem medidada nula.

   Para decidir se a função f é integrável e calcular o seu integral considere-se o raciocínio habitual usando teorema da convergência monótona, isto é, define-se $f_M(x,y) = f(x,y)$ se $(x,y) \in [1,M]^2$, $f_M(x,y) = 0$ caso contrário e calcula-se

$$\lim_{M\to+\infty} \iint_{[1,+\infty[^2} f_M = \frac{1}{2}.$$

   Esta informação torna possível justificar que cada uma das funções que aparecem no limite a calcular é integrável e justificar a troca do limite com o integral, em ambos os casos usando o teorema da convergência dominada com a estimativa

$$\frac{1}{x^2y^3}|1-\cos^k(y/x)| \leq 2f(x,y).$$

   Outros exemplos mais detalhados de solução de problemas similares encontram-se em

   `http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/am3sem1/prob_com.pdf`

   (b) Use-se o teorema da convergência dominada estimando

$$(|x|^p + |y|^p)^{1/p} \leq 2$$

   para garantir a troca do limite com o integral. O limite de $\varphi(x,y,p)$ quando $p \to \infty$ é 1. Usando a simetria da função o resultado é

$$4\iint_{x\geq|y|} x\,dx\,dy = 4\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} x\,dy\right)dx.$$

4. (a) A desigualdade permite estimar o integral de linha sobre uma circunferência centrada em $(0,0)$ como sendo não nulo. Logo o campo não pode ser um gradiente.

   (b) O enunciado só fará sentido se o integral de linha fôr independente do caminho e as fronteiras de bolas centradas na origem forem equipotenciais do campo. Logo um potencial terá que ser da forma $\psi(\|\boldsymbol{x}\|)$. Calcule o gradiente de um tal potencial para descobrir que $\psi' = \varphi$.