Análise Matemática III
Lista de exercícios suplementar 98/99 e alguns problemas comentados

João Palhoto Matos

10 de Novembro de 1998

Todos os exercícios incluídos são exercícios de exame dos últimos 9 anos no IST para os quais tive alguma contribuição. Não houve nenhuma tentativa de ordenação fina e a ordem utilizada não corresponde à ordem de exposição nas aulas. Uma lista de exercícios recomendados está incluída num documento separado.

Os graus de dificuldade são extremamente variáveis e, dado serem exercícios de exame, alguns fazem uma ponte entre vários assuntos o que por vezes pode sugerir que alguns tópicos estão subrepresentados e outros sobrerepresentados (por exemplo: em nenhum destes exercícios é explicitamente pedido para decidir se um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tem ou não medida n-dimensional nula no entanto o responder a tal tipo de questão aparece indirectamente).

Eventualmente serão efectuadas correcções ou adições a esta lista. Estarão disponíveis em

`http://www.math.ist.utl.pt/~jmatos/am3sem1/listexerc.ps`

Quaisquer indicações de "gralhas" podem ser enviadas para

`jmatos@math.ist.utl.pt`

IST, 19/1/98,

João Palhoto Matos

Capítulo 1

Cálculo integral

1.1 Cálculo de integrais em regiões de $\mathbb{R}^n$

Ex. 1.1.1 *Determine o centro de massas do corpo que ocupa a região definida por*

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \frac{3}{4} z \frac{3}{4} 4\}.$$

Ex. 1.1.2 *Considere a região $A \subset \mathbb{R}^3$ definida por*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \frac{3}{4} 1,\ 0 \frac{3}{4} y \frac{3}{4} z\}.$$

a) Identificando A com um sólido de densidade constante calcule as coordenadas do seu centro de massa.

b) Calcule, se existir,

$$\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Ex. 1.1.3 *Calcule as coordenadas do centro de massa de um sólido homogéneo $R \subset \mathbb{R}^3$ definido por*

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 - (y^2 + z^2) \frac{3}{4} x \frac{3}{4} 3 - 2(y^2 + z^2)\}.$$

Ex. 1.1.4 *Calcule o integral*

$$\iint_A \frac{(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}\, dx\, dy$$

em que $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1,\ x > \sqrt{1 + y^2}\right\}$. *[**Sugestão**: Defina uma mudança de variáveis que transforme a região de integração num intervalo, possivelmente ilimitado, de $\mathbb{R}^2$.]*

Ex. 1.1.5 *Considere a região R de $\mathbb{R}^3$ definida por*

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \frac{3}{4} 1,\ 0 \frac{3}{4} x \frac{3}{4} y,\ 0 \frac{3}{4} z \frac{3}{4} 1\}$$

que supomos representar um sólido de densidade constante.

a) Exprima o volume de R como um integral triplo iterado

$$\int\left(\int\left(\int 1\,dz\right)\,dy\right)\,dx$$

ou soma de tais integrais.

b) Obtenha o valor da cota $\overline{z}$ do centro de massas de R.

Ex. 1.1.6 *Considere a região $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 8(x^2+y^2)\frac{3}{4}z\frac{3}{4}(x^2+y^2)^{1/4}\}$.*

a) Identificando V com um sólido de densidade constante, calcule as coordenadas do centro de massas de V.

b) Determine para que valores do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ existe o integral

$$\iiint_V (x^2+y^2)^{\alpha}\,dx\,dy\,dz.$$

Calcule o valor do integral nesses casos.

Ex. 1.1.7 *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ e f uma função integrável em A. Sabe-se que*

$$\int_A f = \int_0^1\left(\int_{x-2}^{x+1} f(x,y)\,dy\right)\,dx + \int_1^2\left(\int_{x-2}^{1+\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Exprima $\int_A f$ como um integral iterado ou soma de integrais iterados pela ordem de integração $\int(\int f(x,y)\,dx)\,dy$.

Ex. 1.1.8 *Calcule as coordenadas do centro de massa de um sólido homogéneo D definido por*

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2}\frac{3}{4}z\frac{3}{4}\sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\frac{3}{4}4\right\}.$$

Ex. 1.1.9 *Considere a região $A \subset \mathbb{R}^2$ limitada por dois segmentos de recta e um arco da parábola $y = \frac{1-x^2}{2}$ esboçada na figura 1.1.*

a) Sendo $k : A \to \mathbb{R}$ uma função integrável em A exprima $\int_A k$ como um integral iterado usando ambas as possíveis ordens de integração em coordenadas cartesianas.

b) Determine a massa de um sólido que se obtém rodando aquela região em torno do eixo dos xx's com densidade proporcional à distância ao mesmo eixo.

Ex. 1.1.10 *Considere o integral iterado*

$$I \equiv \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz\right)\,dy\right)\,dx.$$

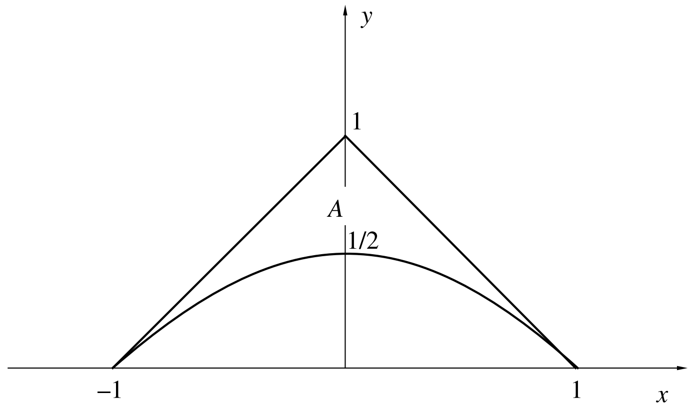


Figura 1.1: Esta figura acompanha o problema 1.1.9.

a) Determine os limites de integração a utilizar se mudarmos a ordem de integração para

$$\int \left(\int \left(\int \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) dx \right) dz.$$

b) Obtenha o valor de I através do uso duma mudança de variáveis conveniente.

Ex. 1.1.11 *Considere a região* $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{sen}(y^2+z^2)\frac{3}{4}x\frac{3}{4}y^2+z^2\frac{3}{4}1\}$.

a) Identificando V com um sólido de densidade constante, calcule as coordenadas do centro de massas de V.

b) Determine para que valores do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ existe o integral

$$\iiint_V \left(y^2+z^2\right)^{\alpha} dx\, dy\, dz.$$

*Calcule o valor do integral nesses casos [***Sugestão:** $\lim_{h\to 0} \frac{h - \operatorname{sen} h}{h^3} = \frac{1}{6}$*].*

Ex. 1.1.12 *Considere regiões $V_{\alpha,\beta}$ em $\mathbb{R}^2$ definidas por*

$$V_{\alpha,\beta} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 2x^2,\ \alpha \le x^2 + 2y^2 \le \beta,\ x \ge 0\right\}$$

em que $0\frac{3}{4}\alpha, \beta\frac{3}{4} + \infty$.

a) Sendo f uma função integrável em $V_{1,2}$ exprima o integral $\int_{V_{1,2}} f\, dx\, dy$ como uma soma de integrais duplos iterados usando coordenadas cartesianas.

b) Defina uma transformação de coordenadas tal que qualquer integral

$$\int_{V_{\alpha,\beta}} h$$

quando expresso como um integral iterado nas novas coordenadas tenha todos os limites de integração constantes. Use-a para calcular, caso existam, os integrais

$$\int_{V_{\alpha,\beta}} \frac{\sqrt{y}}{x}\left(x+\frac{x^3}{4y^2}\right) dx\, dy.$$

nos seguintes casos: b.1) $\alpha = 1$, $\beta = 2$; *b.2)* $\alpha = 0$, $\beta = 1$; *b.3)* $\alpha = 1$, $\beta = +\infty$.

1.2 Limites e integrais

Ex. 1.2.1 *Decida, justificadamente, se existe ou não o integral*

$$\int_1^{+\infty} t\,\mathrm{sen}(1/t) - 1\, dt.$$

Ex. 1.2.2 *Seja* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \frac{3}{4} 1\}$. *Calcule justificadamente, ou mostre que não existe,*

$$\lim_{k\to\infty} \iint_B 1 + \mathrm{sen}^k\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dx\, dy.$$

Ex. 1.2.3 *Calcule justificadamente ou mostre que não existem:*

a)

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/k}\, dt.$$

b)

$$\lim_{k\in\mathbb{N}, k\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{sen}^k(x+y)\, dx\, dy.$$

Ex. 1.2.4 *Calcule ou mostre que não existe*

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right) dy.$$

Ex. 1.2.5 *Calcule justificadamente*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\cos\frac{1}{kx}\right)^k dx.$$

[**Sugestão**: *Use a identidade* $\left|\cos\frac{1}{kx}\right|^k = e^{k\log|\cos(\frac{1}{kx})|}$, *que é válida para quase todo o* x *no intervalo de integração considerado, para calcular o limite pontual da função integranda.*]

Ex. 1.2.6 *Para* $k \in \mathbb{N}$ *considere as funções* $g_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$g_k(x,y) = \frac{\left(x^2+y^2\right)^{k/2}}{1+\left(x^2+y^2\right)^{(k+3)/2}}$$

a) Calcule justificadamente ou mostre que não existe

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{\mathbb{R}^2} g_k(x,y)\,dx\,dy$$

b) Decida justificadamente se pode alterar o resultado da alínea anterior através da alteração dos valores das funções g_k no conjunto

$$A=\bigcup_{j=1}^{\infty}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=j^2\}.$$

Ex. 1.2.7 *Decida se existe ou não o integral*

$$\int_1^{+\infty} 1-e^{-1/t^2}\,dt.$$

[**Sugestão**: *Considere* $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-e^{-1/t^2}}{1/t^2}$.]

Ex. 1.2.8 *Seja $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função definida por*

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} 1, & se\ |(x,y)|<1\\ 2, & se\ |(x,y)|=1\\ (x^2+y^2)^{-3}\,\mathrm{sen}(xy), & se\ |(x,y)|>1\end{cases}$$

Justifique que φ é integrável em $\mathbb{R}^2$. Calcule, justificadamente,

$$\lim_{k\to+\infty}\iint_{\mathbb{R}^2}|\varphi(x,y)|^k\,dx\,dy.$$

Ex. 1.2.9 *Seja $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definido por*

$$F(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}\;e^{-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} & se\ x^2+y^2\notin\mathbb{Q}\\ e^{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} & se\ x^2+y^2\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

Calcule, caso exista, o integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} F.$$

Ex. 1.2.10 *Seja $\alpha\in\mathbb{R}$. Considere o integral*

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{1+(|x|+|y|)^{\alpha}}\,dx\,dy.$$

Determine justificadamente todos os valores de α para os quais o integral existe.
[**Sugestão:** $\sqrt{x^2+y^2}\frac{3}{4}|x|+|y|\frac{3}{4}2\sqrt{x^2+y^2}$. *Use coordenadas polares.*]

Ex. 1.2.11 *Considere a função real de variável real F definida para $t>0$ por*

$$F(t)=\int_t^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx.$$

a) Verifique que F está bem definida e calcule, justificadamente, o limite

$$\lim_{t\to 0^+} F(t).$$

b) Verifique que F é diferenciável em todo o seu domínio e calcule uma expressão para a sua derivada que não inclua derivadas por calcular (embora possa incluir integrais por calcular).

Ex. 1.2.12 *Calcule justificadamente*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(kx) f(x)\, dx$$

nos seguintes casos:

1. *f é a função característica de um intervalo;*
2. *f é uma função em escada;*
3. *f é uma função integrável.*

Ex. 1.2.13 *Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$. Calcule justificadamente ou mostre que não existe*

$$\iint_A \frac{e^{-(x+y)}}{1+(x-y)^2}\, dx\, dy.$$

Ex. 1.2.14 *Seja $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2 < y < 1\}$. Calcule justificadamente ou mostre que não existe*

$$\lim_{k\in\mathbb{N}, k\to\infty} \iint_R \frac{(y-x^2+1)^{2k}}{1+(y-x^2+1)^{2k}}\, dx\, dy.$$

Justifique que o resultado não se altera se os valores das funções integrandas forem alteradas no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.

Ex. 1.2.15 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcule justificadamente

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f.$$

b) Seja $((p_k, q_k))_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^2$. Calcule, justificadamente, a medida do conjunto dos pontos (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tais que a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} f(x-p_k, y-q_k)$$

*não tem soma finita. [**Sugestão:** Integre a série.]*

Capítulo 2

Variedades e integração em variedades

2.1 Teoremas da função inversa e da função implícita

Ex. 2.1.1 *Considere o sistema de equações*

$$\begin{cases} u = & xy + \operatorname{sen}(x+y) \\ v = & e^{-x+y-2} + \frac{x}{y} \end{cases}$$

Mostre que existem vizinhanças de $(u,v) = (-1,0)$ *e de* $(x,y) = (-1,1)$ *tais que o sistema define* (x,y) *como uma função* C^1 *de* (u,v) *desde que as variáveis estejam nessas vizinhanças. Calcule* $\frac{\partial x}{\partial u}(-1,0)$.

Ex. 2.1.2 *Considere o sistema de equações não lineares*

$$u = x^2y^3 + \operatorname{sen}(x+y) - 1$$
$$v = \operatorname{sen}(xy) + x - y + 1$$

a) Mostre que existem vizinhanças de $(x,y) = (0,0)$ *e de* $(u,v) = (-1,1)$ *tais que aquele sistema define* (x,y) *como uma função* C^∞ *de* (u,v) *em tais vizinhanças.*

b) Calcule a matriz jacobiana da função cuja existência garantiu na alínea anterior no ponto $(-1,1)$.

2.2 Variedades diferenciáveis

Ex. 2.2.1 *Decida justificadamente se a igualdade*

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

define ou não uma variedade diferenciável. Se optar pela afirmativa determine a dimensão da variedade e se esta é ou não compacta. Se optar pela negativa determine o maior subconjunto das soluções do sistema que constitui uma *variedade diferenciável. Em qualquer determine o espaço tangente no ponto* $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}(1,1,1)$.

Ex. 2.2.2 *Considere o conjunto* $V \subset \mathbb{R}^3$ *definido por*

$$((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 3)((x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 3) = 0.$$

Decida se V *é uma variedade diferenciável bidimensional ou não. Se a sua resposta fôr negativa determine a maior variedade bidimensional conexa contida em* V *e contendo* $(2,2,2)$. *Em qualquer dos casos determine o espaço tangente em* $(2,2,2)$.

Ex. 2.2.3 *Considere o conjunto* $V \subset \mathbb{R}^4$ *das soluções do sistema não-linear*

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - z^4 - w^4 = 1 \\ x^4 - y^4 - z^4 + w^4 = 1. \end{cases}$$

Verifique se V *é ou não uma variedade diferenciável. Se optar pela afirmativa determine a sua dimensão, caso contrário determine o maior subconjunto de* V *que é uma variedade diferenciável bidimensional. Em qualquer dos casos determine todas as rectas tangentes a* V *no ponto* $(1,1,0,1)$.

Ex. 2.2.4 *Seja*

$$S = \left\{ (w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ w^2 - 3x^2 + y^2 - z^2 + \frac{1}{2} = 0 \right\}.$$

a) *Decida se* S *é ou não uma variedade. Se optar pela afirmativa determine a sua dimensão. Se optar pela negativa determine o menor conjunto* $E \subset \mathbb{R}^4$ *tal que* $S \setminus E$ *seja uma variedade. Em qualquer caso determine o espaço tangente no ponto* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b) *Explique porque é que se pode afirmar que, numa vizinhança de* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, S *define* (w,x) *como uma função* C^∞ *de* (y,z). *Calcule* $\frac{\partial w}{\partial y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Ex. 2.2.5 *Seja*

$$Z = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (z - x^2 - y^2)(y - x^2 - z^2) = 0 \right\}.$$

Identifique uma variedade diferenciável bidimensional desconexa S *e uma variedade diferenciável unidimensional conexa e compacta* L *tais que* $Z = S \cup L$. *Justifique as afirmações anteriores relativas a conectividade, compacidade e ao facto de* S *e* L *serem variedades. Decida justificadamente se* Z *é ou não uma variedade diferenciável. Calcule o espaço normal a* L *no ponto* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ex. 2.2.6 *Seja*

$$Z = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2 - 4)(z - x^2 - y^2) = 0 \right\}.$$

Decida se Z *é ou não uma variedade. Se optar pela negativa determine o "maior" subconjunto de* Z *que constitui uma variedade-2 e decida se o complementar em* Z *deste conjunto é ou não uma variedade-1. Se optar pela afirmativa determine o espaço tangente* $T_Z(2,2,0)$.

Ex. 2.2.7

a) *Seja*

$$V_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + 4(y^2 + z^2) - 1)(4x^2 + \alpha(y^2 + z^2) - 1) = 0\},$$

em que $\alpha > 0$. *Decida para que valores de* α *é que* V_α *é uma variedade e qual a sua dimensão. Nesses casos determine o espaço normal a* V_α *no ponto* $(\sqrt{2}/2, 1/4, 1/4)$.

b) *Determine justificadamente quais são os pontos do plano para os quais existe uma vizinhança na qual a aplicação* $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\psi(x, y) = (e^x + y, e^y + x)$$

é uma transformação de coordenadas.

Ex. 2.2.8 *Considere* $T \subset \mathbb{R}^3$ *definido por*

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Decida justificadamente se T *é ou não uma variedade diferenciável. Se optar pela afirmativa determine a sua dimensão. Se optar pela negativa determine a maior variedade bidimensional conexa contida em* T *que contém o ponto* $(0, 0, 1)$. *Em qualquer dos casos calcule os espaços normal e tangente a* T *no ponto* $(0, 0, 1)$.

Ex. 2.2.9 *Considere a aplicação* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $\varphi(x, y) = (u, v)$ *em que*

$$\begin{cases} u = xy + e^x \\ v = y^2 - x^2. \end{cases}$$

a) *Mostre que* φ *define uma transformação de coordenadas de classe* C^∞ *para* (x, y) *numa vizinhança* U *de* $(0, 1)$. *Calcule* $\frac{\partial y}{\partial v}(1, 1)$.

b) *Seja* L *uma linha regular em* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $(1, 1) \in L$ *e cuja tangente nesse ponto é definida pelo vector* $T(1, 1) = (1, -1)$. *Calcule a tangente à linha* $\varphi^{-1}(L \cap U)$ *no ponto* $(0, 1)$.

Ex. 2.2.10 *Considere o conjunto*

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists_{t \in [0, 2\pi]} \sqrt{x^2 + y^2} = 2 + \operatorname{sen} 2t,\ z = \operatorname{sen} t\}.$$

Decida se M *é ou não uma variedade diferenciável. Se optar pela negativa determine o maior subconjunto de* M *que é uma variedade diferenciável de dimensão 2 e todos os pontos dessa variedade em que o espaço normal é um subespaço de* $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$.

2.3 O método dos multiplicadores de Lagrange

Ex. 2.3.1 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y,z) = xz(1-x^2-y^2).$$

a) *Classifique, caso existam, os pontos de estacionaridade de* f *quanto a serem ou não pontos de extremo local.*

b) *Determine os extremos e pontos de extremo absoluto de* f *restringida à bola fechada de raio* 1 *centrada em* $(0,0,0)$.

Ex. 2.3.2 *Determine os máximos e os mínimos relativos da restrição da função* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x,y,z) = x^2+y^2+4z^2$ *ao conjunto* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Ex. 2.3.3 *Seja* $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $h(x,y,z) = xy+yz+xz$. *Determine o máximo e o mínimo absolutos da restrição de* h *à fronteira da bola de raio 1 centrada em* $(0,0,0)$.

Ex. 2.3.4 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y,z) = (1-x^2-y^2)(1-x^2-z^2).$$

a) *Classifique, caso existam, os pontos de estacionaridade de* f *quanto a serem ou não pontos de extremo local. Se existirem pontos de extremo local decida se são ou não pontos de extremo absoluto.*

b) *Determine os extremos e pontos de extremo absoluto de* f *restringida à fronteira da bola fechada de raio* 1 *centrada em* $(0,0,0)$.

Ex. 2.3.5 *Considere o conjunto*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\frac{3}{4}1\right\}$$

e a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-z$$

a) *Determine, caso existam, os máximos e os mínimos absolutos da restrição de* f *a* E.

b) *Determine o espaço normal a* $L = \partial E \cap \Pi$ *no ponto* $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ *sendo* ∂E *a fronteira de* E *e* $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 2\sqrt{2}\}$.

2.4 Linhas e integrais de linha

Ex. 2.4.1 *Decida justificadamente se o caminho definido em* $\mathbb{R}^3$ *por*

$$r(t) = \left(e^{-t}\cos(t^2), e^{-t}\operatorname{sen}(t^2), e^{-t}\right), \qquad t \in [0,+\infty[,$$

é ou não rectificável.

Ex. 2.4.2 *Calcule*

$$\int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$$

em que L é a linha unindo $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ descrita por $x(t) = -\sqrt{2}$, $y(t) = t$ com $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Discuta se o integral é ou não independente do caminho em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Se optar pela afirmativa determine um potencial em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Caso contrário dê um exemplo de um outro caminho C, seccionalmente regular, também unindo $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, e tal que o integral de linha do mesmo campo tenha um valor diferente.

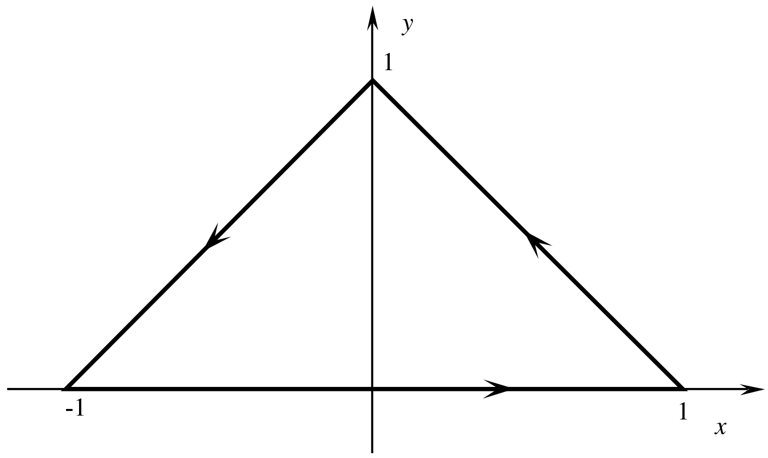
Ex. 2.4.3 *Considere um campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por*

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(x + \frac{x}{|x|}|y|, y + \frac{y}{|y|}|x|\right) & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

a) *Calcule o integral de linha*

$$\oint_L F \cdot dr$$

em que L é a linha fechada simples constituída por 3 segmentos de recta esboçada na figura e com o sentido indicado.



b) *Decida se*

$$\oint_C F \cdot dr = 0$$

ou não para qualquer linha fechada simples regular C em $\mathbb{R}^2$.

Ex. 2.4.4 *Considere o campo vectorial $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por*

$$G(x,y) = (2x^3 + x - y^2 - 2xy, 2y^3 + y - x^2 - 2xy).$$

Decida se este campo é fechado e/ou conservativo em $\mathbb{R}^2$*. Calcule o integral de linha*

$$\int_C G \cdot dr$$

em que C *é o caminho definido por*

$$r(t) = \left(t \operatorname{sen}(\pi t^2), t\cos(\pi t^2)\right), \qquad t \in [0, 1/2].$$

Ex. 2.4.5 *Considere o campo* $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ *definido por*

$$F(x,y) = \left(\frac{x^3}{x^4+y^4}, \frac{y^3}{x^4+y^4}\right)$$

Decida justificadamente se F *é ou não um gradiente de um potencial no seu domínio. Se optar pela afirmativa determine todos os pontos* $P = (x_1, y_1)$ *tais que se* L *é uma linha seccionalmente regular contida no domínio de* F *e unindo* $(1,1)$ *a* P *temos*

$$\int_L F \cdot dr = 1.$$

Ex. 2.4.6 *Seja* $r = \sqrt{x^2+y^2}$*. Sejam* C *a circunferência definida por* $r = 1$ *e* $z = 0$ *e* E *o eixo dos* z*'s. Definimos um campo* $G : \mathbb{R}^3 \setminus (C \cup E) \to \mathbb{R}^3$ *por*

$$G(x,y,z) = \left(-\frac{xz}{r(z^2+(r-1)^2)}, -\frac{yz}{r(z^2+(r-1)^2)}, \frac{r-1}{z^2+(r-1)^2}\right).$$

a) Classifique G *quanto a ser, ou não, um campo fechado.*

b) Determine todos os pontos $P \in \mathbb{R}^3 \setminus (C \cup E)$ *tais que*

$$\int_L G \cdot d\alpha = \frac{\pi}{4}$$

em que L *é uma linha regular em* $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup E)$ *unindo* $(1/2, 1/2, 0)$ *a* P.

c) Decida justificadamente se G *é ou não um gradiente de um potencial em* $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup E)$.

Ex. 2.4.7 *Considere o campo vectorial* $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (1,0)\} \to \mathbb{R}^2$ *definido por*

$$G(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right)$$

a) Mostre que G *é um campo fechado.*

b) Decida se $G = \nabla V$ *para alguma função escalar* V *em cada uma das seguintes regiões:*

b.1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$;

b.2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (1,0)\}$;

b.3) $\mathbb{R}^2 \setminus L$ *em que* L *é o segmento de recta unindo* $(0,0)$ *a* $(1,0)$.

2.5 Integração em variedades. Os teoremas de Gauss e Stokes

Ex. 2.5.1 *Sendo* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0\frac{3}{4}z = 1 - x^2 - y^2\}$, $r = (x, y, z)$ *e* n *a normal a* A *apontando no sentido positivo do eixo dos* z*'s, calcule o integral*

$$\int_A \frac{r \cdot n}{\|r\|^3}\, dV_2.$$

Ex. 2.5.2 *Considere um campo* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$g(x, y, z) = yze^{x^2+z^2},$$

a variedade-2 S *definida por*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x > y > 0,\ z > 0\},$$

com normal unitária $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ *com* $\nu_3 > 0$*, e a linha* L *representada parametricamente por* $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$, $z = \operatorname{sen}\varphi$, $0 < \varphi < \pi/2$*. Calcule*

$$\iint_S \frac{\partial g}{\partial z}\nu_2 - \frac{\partial g}{\partial y}\nu_3\, dV_2 - \int_L g\, dx.$$

Ex. 2.5.3 *Sendo* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2\frac{3}{4}1, z - 1 = x^2 + y^2\}$, $r(x, y, z) = (x, y, z)$ *e* n *a normal a* A *apontando no sentido positivo do eixo dos* z*'s, calcule o integral*

$$\int_A \frac{r \cdot n}{\|r\|^3}\, dv_2.$$

Ex. 2.5.4 *Considere um campo* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por*

$$F(x, y) = \left(\frac{3x^2y^3}{x^6 + y^6},\ -\frac{3x^3y^2}{x^6 + y^6}\right).$$

a) *Calcule o integral de linha*

$$\int_L F \cdot dr$$

nos seguintes casos:

a.1) L *é a linha definida pelo caminho* $r(t) = \left(\cos^{1/3} t, \operatorname{sen}^{1/3} t\right)$ *com* $0\frac{3}{4}t\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}$.

a.2) L *é o segmento de recta orientado unindo* $(1, 0)$ *a* $(0, 1)$.

b) *Decida se* F *é ou não um gradiente de um potencial em* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Ex. 2.5.5 *Sendo* $\epsilon \geq 0$ *definem-se*

$$C_\epsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \epsilon\frac{3}{4}z\frac{3}{4}1\},$$

o campo $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *através de*

$$H(x, y, z) = \begin{cases} \left(-\frac{zy}{x^2+y^2}, \frac{zx}{x^2+y^2}, z\right), & se\ x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & se\ x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

e n *a normal a* C_ϵ *apontando no sentido positivo do eixo dos* z*'s.*

a) Para $\epsilon > 0$ calcule

$$\int_{C_\epsilon} \operatorname{rot} H \cdot n \, dV_2 - \int_L H \cdot dr$$

em que L é a linha parametrizada por $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, $0\frac{3}{4}t\frac{3}{4}2\pi$.

b) Decida se a igualdade

$$\int_{C_0} \operatorname{rot} H \cdot n \, dV_2 = \int_L H \cdot dr$$

é ou não verdadeira.

Ex. 2.5.6 *Calcule*

$$\int_{S_k} F \cdot \nu \, dV_2$$

em que $S_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = k(x^2+y^2) - k,\ x^2+y^2 < 1\}$, para $k \in \mathbb{N}_0$, ν é a normal a S_k com terceira componente positiva e

$$F(x,y,z) = (e^{y^2}, e^{z^2}, z).$$

Ex. 2.5.7 *Considere $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $G(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ e as variedades bidimensionais $S_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) : x+y+z = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$. Calcule*

$$\int_{S_1} G \cdot \mu \, dV_2 - \int_{S_2} G \cdot \nu \, dV_2$$

em que μ, ν designam as normais unitárias a S_1 e S_2 com componente segundo z positiva.

Ex. 2.5.8 *Considere $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$H(x,y,z) = (x((x-1)^2 + z^2 - 1), y((y-1)^2 + z^2 - 1), xyz)$$

e a variedade bidimensional T definida por

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\right\}$$

Calcule

$$\int_T \operatorname{rot} H \cdot n \, dV_2$$

em que n designa a normal unitária a T com componente segundo z positiva.

Ex. 2.5.9 *Calcule*

$$\int_{\partial\Omega} G \cdot \nu \, dV_2$$

em que

$$G(x,y,z) = \left(ze^{-(x^2+y^2+z^2)},\ xz,\ -xe^{-(x^2+y^2+z^2)}\right),$$

$\partial\Omega$ é a fronteira do aberto $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 2 + \operatorname{sen} z\}$ orientada por uma normal unitária contínua ν tal que $\nu(\sqrt{2}, 0, 0) = (1,0,0)$.

Ex. 2.5.10 *Considere um campo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por*

$$G(x,y,z) = (yze^{x^2+z^2}, xze^{x^2+y^2}, xye^{y^2+z^2}).$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo G através da variedade-2 S definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Arbitre o sentido da normal a S.

Ex. 2.5.11 *Decida se o campo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $G(x,y,z) = (2y, 2z, 0)$ é ou não um rotacional em $\mathbb{R}^3$. Se a sua resposta fôr afirmativa calcule um potencial vector H para G , da forma $H(x,y,z) = (P(x,y,z), 0, R(x,y,z))$ indicando se tais funções P, R são ou não únicas.*