Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 13 de Abril de 2013 - 09h00
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução abreviada

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) a) Determine o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

Resolução:
Usando as propriedades das funções contínuas, f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Na origem tem-se

$$\left| \frac{xy^2}{x^2+2y^2} \right| \leq |x|$$

e, portanto, f é também contínua na origem.

(1 val.) b) Calcule a derivada de f na origem segundo o vector $v = (1,1)$.

Resolução:

$$D_v f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{3t^3} = \frac{1}{3}.$$

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y) = f(x^2+y^3)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $f'(1) = 2$.

(2 val.) a) Calcule $Dg(1,0)$.

Resolução:
Pela regra da cadeia, tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^3)\ ; \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3y^2 f'(x^2+y^3),$$

ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = 2f'(1)\ ; \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 0,$$

e, portanto,

$$Dg(1,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1 val.) b) Mostre que $3y^2\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolução:

Basta notar que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^3)\ ; \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3y^2 f'(x^2+y^3).$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 2x^3y.$$

Resolução:

Os pontos críticos são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x - 6x^2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x^3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-xy) = 0 \\ y = x^3, \end{cases}$$

ou seja, são os pontos $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$.

Para a respectiva classificação determina-se a matriz hesseana

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6-12xy & -6x^2 \\ -6x^2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sendo

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$(0,0)$ é um ponto de mínimo relativo.

Dado que

$$H(-1,-1) = H(1,1) = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

então $(-1,-1)$ e $(1,1)$ são pontos de sela porque $\det H(-1,-1) = \det H(1,1) < 0$.

4. Considere o conjunto

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 1\ ;\ 0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1\ ;\ z > -1\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de X em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$.

Resolução:

$$\mathrm{vol}_3(X) = \int_{-1}^{0} \left(\int_{0}^{-z} \left(\int_{0}^{1} dx\right) dy\right) dz \;+\; \int_{-1}^{0} \left(\int_{-z}^{1} \left(\int_{0}^{1-z-y} dx\right) dy\right) dz + \\ + \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1-z} \left(\int_{0}^{1-z-y} dx\right) dy\right) dz$$

(2 val.) b) Calcule $\int_X f$, em que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x,y,z) = x$, usando um único integral triplo.

Resolução:

$$\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1} \left(\int_{-1}^{1-x-y} x\, dz\right) dy\right) dx = \frac{5}{12}$$

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < x < 2 - \sqrt{y^2+z^2}\ ;\ y > 0\}.$$

Resolução:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{0}^{1} \left(\int_{\rho^2}^{2-\rho} \rho\, dx\right) d\rho\right) d\theta = \frac{5\pi}{12}$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x,y)| \le |xy|$. Mostre que f é diferenciável na origem e calcule a derivada $Df(0,0)$.

Resolução:

Note-se que $f(0,0) = f(x,0) = f(0,y) = 0$. Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

e

$$\left|\frac{f(x,y)}{||(x,y)||}\right| \le \frac{|xy|}{||(x,y)||} \le ||(x,y)||,$$

ou seja, f é diferenciável na origem e $Df(0,0) = (0,0)$.