Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame - 24 de Junho de 2013 - 8h - Versão A

Duração: 1h30m (Teste) / 3h (Exame)

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(0,5 val) (a) Determine se f é contínua na origem.

(1 val) (b) Calcule, ou mostre que não existem, as derivadas parciais de f na origem.

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1.

(0,5 val) (a) Sabendo que $\nabla g(-1,1) = (-2,4)$, calcule $h'(-1)$, onde $h(t) = g(t,t^2)$.

(0,5 val) (b) Sabendo que

$$g(t^2,t) = t^5 + t^2 + t \qquad \text{e} \qquad g(t,1) = t^2 + 2, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

determine $\nabla g(1,1)$.

(2 val) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x,y) = x^2y - xy - \frac{1}{y}.$$

4. Considere o sólido V dado por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x < 2 \ , \ 0 < y < 4 - x^2 \ , \ 0 < z < 4 - y\} \ .$$

(1 val) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(1,5 val) (b) Calcule o volume de V usando a ordem de integração $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(1,5 val) 5. Seja A o sólido dado por:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 < x^2 + y^2 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 < 2 \ , \ z > 0\} \ .$$

Através de uma mudança de coordenadas para coordenadas esféricas, calcule o volume de A.

(1,5 val) 6. Considere uma função diferenciável $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onde

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\},$$

satisfazendo a propriedade

$$Df(a)v \cdot v > 0, \quad \forall a \in B_1(0), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Mostre que f é injectiva.

Sugestão: Dados $x, y \in B_1(0)$, considere a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = f(x + t(y-x)) \cdot (y-x).$$

Teste 2

1. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-y)^2 + z^2 = 1\}.$$

(0,5 val) (a) Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão.

(1 val) (b) Determine os pontos de A em que o vector $(0,0,1)$ é normal a A.

(1,5 val) 2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} (x-y)^2 & = & u^2 + v \\ x + y & = & u + v^2 \end{cases}$$

Determine se numa vizinhança do

ponto $(x,y,u,v) = (1,1,1,-1)$ as soluções do sistema são dadas por um gráfico de uma função de classe C^1 da forma $(u,v) = f(x,y)$.

Em caso afirmativo, calcule $Df(1,1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, 1 < y < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária n tal que $n_y < 0$.

(1 val) (a) Calcule a área de S.

(2 val) (b) Calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de n, utilizando o teorema da divergência.

(2,5 val) (c) Calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de n, utilizando o teorema de Stokes.

(1,5 val) 4. Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão k, para algum

$k < n$. Seja $p \in W$ e $v \in \mathbb{R}^n$ um vector tangente a

W em p. Mostre que, para algum $\epsilon > 0$, existe um caminho de

classe C^1

$$g :]-\epsilon, \epsilon[\to W,$$

com $g(0) = p$, tal que

$$\frac{dg}{dt}(0) = v.$$