

Problemas Inversos em Equações Diferenciais Parciais

Carlos J. S. Alves

Instituto Superior Técnico

(2011)

Conteúdo

1	Introdução	4
1.1	Conceitos genéricos	5
1.2	Problemas bem e mal postos	7
1.3	Medições, ruído e crimes	8
1.3.1	Medições e unicidade	9
1.4	Problemas bem e mal postos	10
1.5	Operadores contractivos e compactos	11
1.6	Limitação da inversão	12
2	Métodos de Regularização	14
2.1	Operadores Adjuntos e Sistemas Singulares	15
2.2	Regularização de Tikhonov	17
2.3	Método de truncatura espectral	18
2.4	Regularização de Tikhonov	20
2.5	Regularidade das Estratégias	22
3	Problemas inversos de fontes	24
3.1	Teoremas para a identificabilidade	24
3.2	Limitações na determinação da fonte	26
3.3	Identificação de pontos fontes	27
3.3.1	Problema directo	27
3.3.2	Problema inverso - identificabilidade	28
3.4	Funcional de Reciprocidade	29
3.4.1	Método de El Badia - Ha Duong para fontes pontuais	30
3.4.2	Determinação de fontes harmónicas	31
3.4.3	Estabilidade do problema inverso de fontes	32
3.5	Problemas inversos de inclusões ou cavidades	32
3.5.1	Unicidade da inclusão	33
3.5.2	Determinação da inclusão	34
3.5.3	Determinação de fissuras	35
4	Transformadas de Radon e de Raio-X	38
4.1	Transformação de Radon	38
4.2	Transformação de Raio-X	40

5	Difracção de ondas	41
5.1	Equação de Helmholtz	41
5.1.1	Frequências de ressonância	42
5.2	Problemas de Helmholtz exteriores	43
5.2.1	Ondas incidentes e ondas difractadas	43
5.2.2	Amplitude limite	45
5.2.3	Potenciais de Camada	45
5.3	Problema inverso - unicidade	46
5.3.1	Unicidade do problema de difracção	47
5.4	Métodos numéricos no Problema Inverso de difracção	49
5.4.1	Método de Kirsch-Kress	49
5.4.2	Método de Colton-Monk	50
5.4.3	Método de Colton-Kirsch	51
5.5	Aproximação da Óptica Geométrica	52
5.5.1	Aproximação de Kirchhoff	52
5.5.2	Identidade de Bojarski	54
6	Anexos	56
6.1	Método de Newton-Kantorovich	56
6.1.1	Derivação de Fréchet	56
6.1.2	Método de Newton-Kantorovich	57
6.2	Métodos de Optimização	58
6.2.1	Método dos Mínimos Quadrados no quadro funcional	58
6.2.2	Método do Gradiente	59
6.2.3	Método de Gauss-Newton (mínimos quadrados não lineares)	60

1 Introdução

Estas notas servem de apoio à cadeira de Problemas Inversos em Equações Diferenciais com aplicações em Imagiologia, em particular em Imagiologia Médica.

Há diversas classificações para problemas inversos, algumas das quais partem da simples definição de função inversa.

Nas aplicações da Matemática, os problemas inversos estão normalmente associados a modelos, que descrevem um problema directo. As questões de recuperação de informação, partindo dessa modelação directa, envolvem então problemas inversos. Por exemplo, podemos definir um modelo directo que descreve a medição de calor numa superfície, definindo uma certa temperatura noutra. Um problema inverso simples será procurar encontrar a temperatura definida pela medição do calor. Um outro problema inverso, mais complicado, será obter a forma da superfície...

Iremos considerar diversos problemas inversos no contexto de várias equações diferenciais que modelam fenómenos físicos clássicos. Em particular, focaremos o caso da teoria do potencial, associada a equações do calor, electrostática, escoamento de fluidos, num caso de equilíbrio estacionário, descrita por equações de Poisson. Também abordaremos problemas inversos no contexto da equação das ondas, nomeadamente pela sua modelação em frequência, em tempo harmónico, pela equação de Helmholtz. Há possíveis generalizações às equações de Navier, de Stokes ou de Maxwell, mas não iremos complicar o modelo directo, concentrando-nos nos métodos para os casos directos mais simples. Esses métodos podem depois ser generalizados, quando possível, com as devidas adaptações. As aplicações são múltiplas, no âmbito da engenharia mecânica, civil, de materiais, de fluidos, na sismologia, etc...

As aplicações à Imagiologia Médica surgem de várias formas. A imagiologia tem um lado mais conhecido através da reconstrução computadorizada de Raios X, e sobre isso falaremos da Transformação de Radon. Também são conhecidas as aplicações dos ultrassons, de que falaremos da Aproximação de Born, no quadro da Equação de Helmholtz, no chamado problema de *backscattering*. Mas, para além destes enquadramentos mais conhecidos, recentemente, há um grande interesse de aplicação a nova imagiologia médica, usando novos métodos, em particular alguns dos que falaremos aqui.

1.1 Conceitos genéricos

Podemos ver os problemas inversos num contexto geral em que definimos um problema directo:

$$\mathcal{P} : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \tag{1.1}$$

que de uma forma genérica transforma um dado $\xi \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$ produz um resultado $\mathcal{P}(\xi) \in \mathcal{P}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{Y}$. Só que neste quadro simplificado devemos entender que ξ tem múltiplos argumentos, alguns dos quais serão mantidos na imagem $\mathcal{P}(\xi)$, sendo nosso objectivo inverso recuperar a informação desconhecida.

Exemplo 1.1. Exemplificamos com um problema clássico, de inversão de um operador integral compacto $A : C[0, 1] \rightarrow C[1, 2]$:

$$A\phi(x) = \int_0^1 K(x, y)\phi(y)dy,$$

onde o núcleo K é contínuo, $K \in C([1, 2] \times [0, 1])$. Nesta situação podemos considerar como problema directo o cálculo de $f = A\phi$, e assim \mathcal{P} é identificado ao operador A , onde o domínio é $\mathcal{X} = C[0, 1]$, e a imagem é colocada em $\mathcal{Y} = C[1, 2]$. É evidente que a imagem $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = A(C[0, 1])$ é apenas um subconjunto de $C[1, 2]$, havendo funções contínuas $f \in C[1, 2]$ que não vão ser resultado de nenhum ϕ . Em caso extremo $K = 0$, havendo apenas imagem nula, e iremos ver que a situação de inversão será pior para funções K mais regulares, pois levam a operadores compactos, desde que o núcleo seja contínuo, ou bastando até ser fracamente singular (existência do integral no sentido clássico de Lebesgue).

Exemplo 1.2. Um exemplo diferente, consiste em considerar A dependente de K , designando por A_K . Agora há que tentar determinar K conhecendo resultados de sucessivos problemas $A_K\phi = f$. Colocamos a incógnita em $L^2([1, 2] \times [0, 1])$, o que engloba núcleos descontínuos, e podemos formular o problema directo na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad \mathcal{X} = L^2([1, 2] \times [0, 1]) &\rightarrow \mathcal{Y} = \mathcal{L}(L^2[0, 1], L^2[1, 2]) \\ K &\mapsto A_K \end{aligned}$$

e este problema já é mais complicado. Em particular pode envolver uma recuperação de função característica $K = \chi_\Omega$ onde Ω é um conjunto de $[1, 2] \times [0, 1]$, e agora o domínio está restrito a

$$\mathcal{D} = \{K \in L^2([1, 2] \times [0, 1]) : \exists \Omega \subset [1, 2] \times [0, 1] : K = \chi_\Omega\}.$$

Mesmo assim este domínio é suficientemente lato, já que envolve todas as geometrias para Ω , e podemos restringi-lo a borelianos, a conjuntos conexos, simplesmente conexos, com regularidade na fronteira $\partial\Omega$, etc. Ou ainda, essa fronteira ser descrita por uma função radial $r \in C^2[0, 2\pi]$, na forma polar $\Omega_r = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq r(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Quando restringimos à classe de funções características, o problema perde o carácter linear (a soma de funções características não é necessariamente função característica, basta que haja sobreposição de conjuntos). Podemos alternativamente definir esse problema com $\mathcal{X} = \{\Omega \subset [1, 2] \times [0, 1] : \Omega \text{ é conexo e } \partial\Omega \in C^2\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{Y} = \mathcal{L}(C[0, 1], C[1, 2]) \\ \Omega &\mapsto A_{\chi_\Omega} \end{aligned}$$

e passamos a ter um conjunto como incógnita a recuperar. No caso em que a fronteira pode ser descrita pela sua forma radial, podemos voltar ao enquadramento não geométrico

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad \mathcal{X} = \{r \in C^2[0, 2\pi] : r > 0\} &\rightarrow \mathcal{Y} = \mathcal{L}(C[0, 1], C[1, 2]) \\ r &\mapsto A_{\chi_{\Omega_r}} \end{aligned}$$

usando r a função radial da fronteira para descrever o conjunto Ω_r .

Observação 1.3. Interessa aqui colocar em evidência uma distinção entre problemas que envolvem a recuperação de funções e problemas que envolvem a recuperação de uma geometria. Nem sempre essa geometria pode ser descrita no contexto de funções características. Há outro tipo de técnicas que visam remeter o problema geométrico a um problema funcional, nomeadamente por conjuntos de nível ou funções de parametrização, mas é conveniente deixar o contexto geral.

Observação 1.4. Importa ainda notar que o domínio do problema directo deve ser o objectivo a recuperar no problema inverso, e que por outro lado,

as imagens no problema directo devem estar no espaço de medições para o problema inverso. Tudo o que permanecer inalterado deve ser considerado constante, não fazendo parte da aplicação \mathcal{P} .

1.2 Problemas bem e mal postos

Começamos por rever a definição de Hadamard de “problema bem posto”:

- Existência e Unicidade. *No quadro do problema directo correspondem apenas a definir (univocamente) a aplicação \mathcal{P} .*
- Estabilidade. *Definimos métricas, ou normas, em \mathcal{X} e \mathcal{Y} , que avaliem a dependência em \mathcal{Y} das perturbações em \mathcal{X} . Em particular, interessamos saber se existe alguma constante de continuidade $C > 0$ tal que:*

$$d_{\mathcal{Y}}(\mathcal{P}(\xi_1), \mathcal{P}(\xi_2)) \leq C d_{\mathcal{X}}(\xi_1, \xi_2), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D},$$

onde $d_{\mathcal{X}}, d_{\mathcal{Y}}$ representam métricas sobre \mathcal{X} e \mathcal{Y} , respectivamente.

Relativamente ao Problema Inverso, podemos considerar a aplicação inversa

$$\mathcal{P}^{-1} : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \tag{1.2}$$

mas com a menção de que não podemos assegurar que as medições se circunscrevam à imagem $\mathcal{P}(\mathcal{D})$. Devemos considerar perturbações nas medições, que estão em $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{P}(\mathcal{D})$.

- Existência. *A questão da existência no problema inverso parece artificial, porque é garantida automaticamente se o domínio for $\mathcal{P}(\mathcal{D})$. Um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ é da forma $\eta = \mathcal{P}(\xi)$, e automaticamente*

$$\mathcal{P}^{-1}(\eta) = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}(\xi) = \xi \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}. \tag{1.3}$$

Pelo contrário, sendo $\eta \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{P}(\mathcal{D})$, sabemos por definição que $\mathcal{P}^{-1}(\eta) \notin \mathcal{D}$, e apenas podemos definir $\mathcal{P}^{-1}(\eta) \in \mathcal{X}$.

- Unicidade. *Esta questão está directamente ligada à injectividade de \mathcal{P} em \mathcal{D} . Só é colocada para medições exactas, em $\mathcal{P}(\mathcal{D})$, porque, como vimos, para medições perturbadas, nem tão pouco garantimos a existência em \mathcal{D} .*

- Regularidade. *A questão da regularidade no problema inverso pode ser colocada no quadro mais vasto, em \mathcal{Y} (onde se efectuam as medições), procurando não apenas que*

$$d_{\mathcal{X}}(\xi_1, \xi_2) \leq \zeta d_{\mathcal{Y}}(\mathcal{P}(\xi_1), \mathcal{P}(\xi_2)).$$

Preferencialmente, para garantir a recuperação com dados perturbados, devemos ter

$$d_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}^{-1}(\eta_1), \mathcal{P}^{-1}(\eta_2)) \leq \zeta d_{\mathcal{Y}}(\eta_1, \eta_2),$$

para $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{Y}$, assumindo que aí \mathcal{P} está bem definido.

1.3 Medições, ruído e crimes

No contexto que acabamos de ver, o problema está já definido, o que revela um conhecimento *a posteriori*. Essa é a situação matemática habitual... *a posteriori*, quando a investigação já foi feita. No entanto, antes disso há dúvidas em vários aspectos.

Vamos rever os conceitos do Problema Inverso à luz dessa incerteza.

1) Existência. Como vimos, a existência não é normalmente um problema matemático relevante no contexto de problemas inversos, pois assumimos que as medições surgiram de um problema directo. Assim, a menos dos erros nas medições, há uma solução que originou os dados que medimos, e por isso a existência é um dado de partida. Isto é substancialmente diferente dos problemas de optimização de forma, onde podemos não saber se existe um minimizante.

2) Unicidade. Há aqui um diferença importante, que se pode ver nos dois exemplos vistos antes. No primeiro exemplo, o objectivo seria fazer a recuperação de ϕ com uma medida de f , e certamente não podemos fazer menos que uma medida. Já no caso do segundo exemplo, a determinação do núcleo K certamente que não pode ser feita com uma única medida. Quantas são então precisas? Um número finito, numerável, ou mais?

Quando definimos o operador \mathcal{P} a imagem foi colocada em todos os operadores, e isto implicaria um conhecimento de todos os pares (ϕ, f) , pares de (dado, medição), o que corresponderia a infinitos dados, e infinitas medições correspondentes. No entanto, como podemos usar uma base numerável de $L^2[0, 1]$, isso diminui a potência do infinito considerado.

Basta nesse caso considerar $\phi_1, \dots, \phi_n, \dots$ essa base, e usando as medições $f_n = A_K \phi_n$ com $n \in \mathbb{N}$, determinar o núcleo K .

Sabendo isto, podemos redefinir agora o problema directo, para se ajustar às medições necessárias:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad \mathcal{X} = L^2([1, 2] \times [0, 1]) &\rightarrow \mathcal{Y} = (L^2[1, 2])^{\mathbb{N}} \\ K &\mapsto (f_1, \dots, f_n, \dots) \end{aligned}$$

Repare-se que omitimos a base $\{\phi_1, \dots, \phi_n, \dots\}$ porque pode ser assumida constante no problema. São as imagens $f_n = A_K \phi_n$ que irão permitir determinar K .

1.3.1 Medições e unicidade

A questão é significativamente diferente em termos da unicidade.

Juntámos a informação genericamente no operador \mathcal{P} , mas podemos considerar várias medições distintas vistas como uma só ou não.

Por exemplo, o resultado pode ser $\mathcal{P}(x) = (g, P(\gamma))$, onde g é uma função vectorial e $P(\gamma)$ também. Dessa forma, podemos considerar que há várias componentes $(g_k, P_k(\gamma))$ que correspondem a funções conhecidas g_k e a diferentes medições $P_k(\gamma)$. A unicidade para a recuperação de γ poderá ser apenas garantida com várias medições, e não apenas com uma única. Assim, a demonstração de unicidade para um problema inverso, envolve também uma flexibilidade na definição do problema directo.

Podemos não ter unicidade para uma única medida, mas consegui-la usando duas, ou um número finito de medições. Há outros casos em que apenas é garantida a unicidade com uma infinidade de medições, o que na prática será impossível, mas por outro lado, pode permitir algoritmos de recuperação eficazes.

Medições e Ruído.

Do ponto de vista prático, há que considerar as perturbações nas medições, normalmente designadas por ruído. Ou seja, devemos considerar que

$$\tilde{\mathcal{P}}(x) = (g, \tilde{P}(\gamma))$$

e portanto a diferença entre $\tilde{P}(\gamma)$ e $P(\gamma)$ é provocada pela existência de um certo ruído.

Podem usar-se filtros F para regularizar $\tilde{P}(\gamma)$, procurando que $F(\tilde{P}(\gamma))$ seja mais conforme a $P(\gamma)$, mas normalmente devemos evitar a priori destruir a informação recebida aplicando um filtro que vise apenas eliminar ruído...

arriscamos a eliminar informação, pela simples arbitrariedade na escolha do filtro. Ao invés, devemos procurar algoritmos que visem encontrar uma solução $\tilde{\gamma}$ tal que a diferença entre $\tilde{P}(\gamma)$ e $P(\tilde{\gamma})$ seja mínima, pois a priori não conhecemos γ .

Assumir a existência de ruído é essencial no teste da eficácia de qualquer método numérico em problemas inversos.

Crimes inversos. Há uma designação corrente que visa afastar a simplificação algorítmica que ilude uma recuperação da informação, mas que na prática se revelaria completamente inútil.

1.4 Problemas bem e mal postos

Consideramos X, Y espaços de Banach e um operador A

$$A : U \subseteq X \rightarrow V \subseteq Y$$

Exemplo 1.5. A pode ser um operador integral

$$(A\phi)(x) = \int_{[0,1]} K(x, y)\phi(y)dy$$

em que os espaços X, Y são $C[0, 1]$, que é Banach com a norma usual definida neste espaço de funções contínuas em $[0, 1]$:

$$\|u\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |u(x)|.$$

Se considerarmos $K(x, y) = k_a(x)k_b(y)$, ficamos com

$$(A\phi)(x) = \int_{[0,1]} k_a(x)k_b(y)\phi(y)dy = k_a(x)C_\phi$$

com $C_\phi = \langle k_b, \phi \rangle_{L^2(0,1)}$

e a estrutura é muito simples, é multiplicativa. De facto, quando o núcleo K se pode separar na multiplicação de funções, que só dependem de uma das variáveis, o resultado é sempre o mesmo. Neste caso é a função k_a e a única variação é o valor da constante C_ϕ que depende de ϕ .

Ou seja, a imagem do operador A é gerada apenas pela função k_a , isto é, $A(C[0, 1]) = \langle k_a \rangle$. Portanto, quando é possível separar o núcleo num produto de funções com variáveis independentes, a imagem é subespaço com dimensão finita, tendo neste caso dimensão 1. \square

Definição 1.6. Dizemos que o operador A é contínuo em ψ se

$$\phi \rightarrow \psi \Rightarrow A\phi \rightarrow A\psi.$$

(quando escrevemos $\phi \rightarrow \psi$ isso significa convergência na norma do espaço de Banach X ,

$$\|\phi - \psi\|_X \rightarrow 0,$$

e por outro lado $A\phi \rightarrow A\psi$ significa convergência na norma do espaço de Banach Y)

No caso de operadores lineares, para assegurar a continuidade, basta ver que é limitado

$$\text{existe } C > 0 : \quad \|A\phi\| \leq C\|\phi\|$$

... basta reparar que

$$\|A\phi - A\psi\|_Y = \|A(\phi - \psi)\|_Y \leq C\|\phi - \psi\|_X \rightarrow 0.$$

Para além disso interessa saber se o operador A é

- injectivo ($A\phi = A\psi \Rightarrow \phi = \psi$)
- sobrejectivo ($\forall y \in Y \exists x \in X : Ax = y$)

Observação 1.7.

(i) Se A for um operador linear limitado (ie. contínuo) e bijectivo, então pelo Teorema da Aplicação Aberta, o operador inverso A^{-1} é também linear limitado e bijectivo.

(ii) Ainda que haja bijectividade, se A não for contínuo em x então um cálculo aproximado de Ax é um *problema mal posto*, e de forma semelhante se A^{-1} não for contínuo em y então a resolução de $Ax = y$ é também um *problema mal posto*.

1.5 Operadores contractivos e compactos

De entre os operadores com que iremos trabalhar interessa considerar operadores que possuam uma característica que é terem uma "imagem pequena". Em termos da norma, essa característica é dada pelos *operadores contractivos*, ou seja operadores com norma menor que 1.

Proposição 1.8. *Se $\|A\| < 1$ então é válida a expansão em série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (1.4)$$

o que permite uma forma explícita para a resolução de equações de Fredholm de segunda espécie $f - Af = g$.

Uma outra maneira de definir essa "imagem pequena", é através da noção de *operador compacto*:

Proposição 1.9. *Dizemos que $A : X \rightarrow Y$ é compacto se transforma conjuntos limitados de X em relativamente compactos de Y*

Nota: os operadores compactos são limitados, porque os conjuntos relativamente compactos são limitados. Em particular, quando consideramos operadores lineares, isto significa que os operadores compactos são contínuos (porque há equivalência entre limitação e continuidade no caso linear).

Alternativamente podemos usar a caracterização:

Proposição 1.10. *A é linear compacto sse transforma sucessões (u_n) limitadas em X em sucessões (Au_n) que têm subsucessões convergentes.*

Têm especial importância para o estudo seguinte, as propriedades:

Proposição 1.11. *Se A é um operador compacto o número dos seus valores próprios é finito (com subespaços próprios de dimensão finita) ou tem um ponto de acumulação em zero.*

Proposição 1.12. *A identidade só é um operador compacto se o espaço X tiver dimensão finita.*

1.6 Limitação da inversão

Para um operador $A : U \subseteq X \rightarrow V \subseteq Y$ dizemos que o problema de calcular $g = Af$ é bem posto se A for bijectivo e contínuo.

De forma semelhante, o problema inverso, de encontrar $f : Af = g$ será bem posto se A^{-1} for bijectivo e contínuo.

Pelo Teorema da Aplicação Aberta, se A for limitado e bijectivo então A^{-1} é limitado e bijectivo.

Teorema 1.13. *Se A é compacto e injetivo então A^{-1} , em $A(X)$, não é um operador contínuo se $\dim(X) = \infty$.*

Demonstração. basta reparar que $A^{-1}A$ é a composição de um operador compacto A com um contínuo, por hipótese de absurdo A^{-1} . Logo $A^{-1}A$ será compacto, e também será a identidade, que só poderá ser compacto para $\dim(X) < \infty$. \square

Conclui-se que se A for compacto a resolução de problemas inversos (encontrar f tal que $Ag = g$) só é um problema bem posto em dimensão finita.

2 Métodos de Regularização

Seja $A : X \rightarrow A(X) \subset Y$ um operador linear compacto injetivo. A sua inversa apenas está definida em $A(X)$ que está contido em (mas não é) Y .

Para resolvermos uma equação da forma $Af = g$ temos que admitir que os dados não estão em $A(X)$, são $g_\delta \in Y$ e apenas sabemos que $\|g - g_\delta\|_Y \leq \delta$, ou seja podemos controlar a inexactidão do que medimos na majoração por um parâmetro δ .

Como g_δ pertence a Y e não necessariamente a $A(X)$ a inversão irá ser feita de forma artificial ("aproximada") introduzindo um esquema regularizador, que corresponderá a uma aproximação da inversa.

Definição 2.1. Seja $A : X \rightarrow A(X) \subset Y$ um operador linear injetivo limitado, e consideramos uma família de operadores $(R_\alpha) : Y \rightarrow X$ que são lineares limitados. Se

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Af = f$$

para cada $f \in X$, dizemos que essa família é um *esquema regularizador* para a inversão do operador A . O parâmetro α é designado *parâmetro de regularização*.

Observação 2.2. Dizer que $R_\alpha Af \rightarrow f$ para cada $f \in X$ equivale a dizer que $R_\alpha g \rightarrow A^{-1}g$ para cada $g \in A(X)$. (... porque qualquer $g \in A(X)$ se pode escrever como $g = Af$)

Assim, quando $g_\delta \notin Y$ apenas faz sentido falar nas diversas aproximações

$R_\alpha g_\delta$ que designaremos f_δ com o intuito de aproximar a resolução " $Af_\delta = g_\delta$ ". Podemos ainda ser mais precisos, e considerar a dependência em α escrevendo $R_\alpha g_\delta = f_\delta^\alpha$.

Teorema 2.3. *Para o operador A compacto, a convergência $\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Af = f$ apenas pode ser encarada como convergência pontual e não como convergência em norma (ou seja, não se tem $\|R_\alpha A - I\| \rightarrow 0$. Para além disso, os operadores R_α em norma não são limitados quando $\alpha \rightarrow 0$.*

Verifica-se facilmente que

$$\|f - f_\delta^\alpha\| \leq \|R_\alpha\| \|g - g_\delta\| + \|R_\alpha Af - f\|$$

... porque $f_\delta^\alpha - f = R_\alpha g_\delta - R_\alpha g + R_\alpha g - f = R_\alpha(g_\delta - g) + (R_\alpha A f - f)$.
Esta estimativa permite perceber que:

- o termo

$$\|R_\alpha\| \|g - g_\delta\| \leq \|R_\alpha\| \delta$$

tem um compromisso na majoração por δ na aproximação dos dados medidos em g com a não limitação de $\|R_\alpha\|$ quando $\alpha \rightarrow 0$, enunciada no teorema anterior.

- o termo

$$\|R_\alpha A f - f\|$$

tende para zero, por definição do esquema regularizador, quando $\alpha \rightarrow 0$.

Há assim um equilíbrio quando $\alpha \rightarrow 0$, entre a não limitação do termo $\|R_\alpha\|$, que pode ser compensado na multiplicação com um δ suficientemente pequeno, com o outro termo $\|R_\alpha A f - f\|$ que só converge para zero quando $\alpha \rightarrow 0$.

Isto leva à noção de dependência entre α e δ e às estratégias para os esquemas de regularização:

Definição 2.4. Uma estratégia para um esquema regularizador consiste em escolher $\alpha(\delta)$ e a dependência em δ é dita *estratégia regular* se para cada $g \in A(X)$ e $g_\delta \in Y$ tivermos

$$\|g - g_\delta\| \leq \delta \Rightarrow R_{\alpha(\delta)} g_\delta \rightarrow A^{-1} g \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (2.1)$$

A estratégia é dita *a priori* quando é baseada num conhecimento do comportamento da solução exacta, e *a posteriori* quando é baseada na avaliação da medição $\|g - g_\delta\|$. Neste último caso inclui-se o Princípio de Morozov, em que o resíduo $\|A f_\alpha^\delta - g_\delta\|$ deve ser da mesma ordem de grandeza que δ .

2.1 Operadores Adjuntos e Sistemas Singulares

Consideremos $A : X \rightarrow Y$ em que X, Y são espaços de Hilbert em que definimos o operador adjunto $A^* : Y \rightarrow X$ tal que

$$\langle Au, v \rangle_Y = \langle u, A^*v \rangle_X, \quad \forall u \in X, v \in Y. \quad (2.2)$$

Dizemos que B é *auto-adjunto* se $B^* = B$ (para que isso aconteça $X = Y$.)

Exemplo 2.5. Consideramos o operador $Au(x) = \int_S K(x,y)u(y)dy$, com $x \in T$, e em que o núcleo K é contínuo (ou mesmo L^2) em $T \times S$. O operador está bem definido para qualquer $u \in L^2(S) = X$, com imagem em $Y = L^2(T)$.

Então o operador adjunto é $A^*v(y) = \int_T K(x,y)v(x)dx$, pois

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle_{L^2(T)} &= \int_T (Au)(x)v(x)dx = \int_T \int_S K(x,y)u(y)dyv(x)dx \\ &= \int_S \int_T K(x,y)v(x)dxu(y)dy = \langle u, A^*v \rangle_{L^2(S)}. \quad \square \end{aligned}$$

A partir da noção de valores próprios do operador A^*A consideramos agora a noção de valores singulares de A .

Definição 2.6. Seja λ um valor próprio de A^*A (ou seja, $\exists u \neq 0 : A^*Au = \lambda u$, e $\lambda \geq 0$ pois A^*A é auto-adjunto), a raiz $\mu = \sqrt{\lambda}$ é denominada valor singular de A .

Note-se que se um operador B for injectivo o seu núcleo $N(B) = \{u \in X : Bu = 0\}$ é $\{0\}$, e portanto não tem valores próprios nulos. Assim, se A injectivo, A^* é injectivo, logo A^*A injectivo e os valores singulares de A não podem ser nulos.

Note-se ainda que sendo A um operador compacto, A^* também será, e a composição que resulta no operador A^*A também é um compacto. Os operadores compactos auto-adjuntos têm um número contável de valores próprios não negativos que só pode acumular em zero. Assim, sejam f_n as funções próprias associadas aos valores próprios μ_n^2 do operador A^*A

$$A^*Af_n = \mu_n^2 f_n, \tag{2.3}$$

ortonormalizadas.

Observação 2.7. Uma base de valores próprios para um operador auto-adjunto B pode ser sempre ortonormada porque

$$\mu_n \langle f_n, f_m \rangle = \langle Bf_n, f_m \rangle = \langle f_n, B^* f_m \rangle = \mu_m \langle f_n, f_m \rangle$$

o que implica $(\mu_n - \mu_m) \langle f_n, f_m \rangle = 0$ e portanto ou $\mu_n = \mu_m$ ou $\langle f_n, f_m \rangle = 0$. Para ser ortonormada basta que sejam considerados vectores (funções) ortogonais no subespaço próprio, quando $\mu_n = \mu_m$, já que para valores diferentes a ortogonalidade é imediata. Para normalizar, basta dividir pela norma.

As funções próprias constituem uma base contável do espaço X logo pela decomposição espectral podemos escrever

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n + Qf \quad (2.4)$$

em que Qf é a projecção de f no núcleo $N(A)$. Assim, devido à ortonormalização, temos

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 + \|Qf\|^2$$

notando que nos casos em que A é injectivo teremos $Qf = 0$.

De forma semelhante, para o operador AA^* consideramos

$$AA^* \phi_n = \mu_n^2 \phi_n \quad (2.5)$$

e (ϕ_n) constituem uma base contável de Y .

Definição 2.8. Dizemos que (μ_n, f_n, ϕ_n) é um sistema singular associado ao operador compacto A com

$$Af_n = \mu_n \phi_n, \quad A^* \phi_n = \mu_n f_n. \quad (2.6)$$

Como a sucessão dos valores singulares (μ_n) é contável, ordenamos $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq 0$.

2.2 Regularização de Tikhonov

A ideia da regularização de Tikhonov consiste na utilização do operador adjunto A^* e baseia-se nos seguintes passos:

$Af = g$ implica $A^*Af = A^*g$ e também implicaria $(\alpha I + A^*A)f = A^*g$ se $\alpha = 0$. A ideia é precisamente considerar $\alpha \rightarrow 0$ e ter em consideração que se $\alpha > 0$ então $(\alpha I + A^*A)$ é invertível e ficamos com

$$f = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g \quad (2.7)$$

por isso o esquema de regularização de Tikhonov é definido pela família de operadores

$$R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*. \quad (2.8)$$

Nota: $(\alpha I + A^*A)$ é invertível porque o operador A^*A é auto-adjunto, com valores próprios não negativos, a que se soma α positivo.

2.3 Método de truncatura espectral

Seja (μ_n, f_n, ϕ_n) um sistema singular associado ao operador compacto A injectivo.

Para $\alpha = 1/m$ consideramos o operador

$$R_\alpha g = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\mu_n} \langle g, \phi_n \rangle f_n \quad (2.9)$$

para $g \in A(X)$. Como

$$\begin{aligned} R_\alpha(Af) &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\mu_n} \langle Af, \phi_n \rangle f_n = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\mu_n} \langle f, A^*\phi_n \rangle f_n \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\mu_n} \langle f, \mu_n f_n \rangle f_n \approx \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n = f \end{aligned}$$

toma sentido a aproximação da inversa que constitui a truncatura da soma nos primeiros m termos, conforme definido R_α .

Teorema 2.9. (Picard) *Seja $A : X \rightarrow Y$ um operador compacto e (μ_n, f_n, ϕ_n) um sistema singular associado. A equação $Af = g$ tem solução sse $g \in N(A^*)^\perp$ e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 < \infty. \quad (2.10)$$

A solução é nesse caso dada por

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \langle g, \phi_n \rangle f_n \quad (2.11)$$

Demonstração. (ver também [4])

O teorema usa a propriedade em espaços de Hilbert

$$A(X)^\perp = N(A^*), \quad N(A^*)^\perp = \overline{A(X)}.$$

Resultante da definição do sistema singular temos

$$\mu_n \langle f, f_n \rangle = \mu_n \langle f, \frac{1}{\mu_n} A^* \phi_n \rangle = \langle Af, \phi_n \rangle = \langle g, \phi_n \rangle$$

logo

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |\langle g, \phi_n \rangle|^2$$

e sendo f solução então $\|f\| < \infty$ implica o resultado (\Rightarrow). \square

Observação 2.10. O Teorema de Picard permite observar os problemas de instabilidade que ocorrem para operadores compactos. Como $\mu_n \rightarrow 0$, para um μ_m próximo de zero, temos que uma pequena perturbação $g_\delta = g + \delta\phi_m$ irá ter como solução $f_\delta = f + \frac{\delta}{\mu_m} f_m$ (pois $Af_\delta = Af + \frac{\delta}{\mu_m} (\mu\phi_m) = g + \delta\phi_m$). Ou seja, os erros de f podem ser tão grandes quanto se queira bastando para isso que μ_m seja muito próximo de zero. Em termos de erros absolutos $\|g_\delta - g\| = \delta$ implica $\|f_\delta - f\| = \frac{\delta}{\mu_m}$

Teorema 2.11. (regularização por truncatura): *Seja A operador compacto injectivo linear com (μ_n, f_n, ϕ_n) um sistema singular associado. Seja $q :]0, \infty[\times]0, \|A\| \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada verificando:*

$$\forall \alpha \exists c(\alpha) : |q(\alpha, \mu)| \leq c(\alpha)\mu, \quad (0 < \mu \leq \|A\|) \quad (2.12)$$

e também

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} q(\alpha, \mu) = 1, \quad (0 < \mu \leq \|A\|). \quad (2.13)$$

Então os operadores limitados

$$R_\alpha g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_n)}{\mu_n} \langle g, \phi_n \rangle f_n \quad (2.14)$$

(definidos para qualquer $g \in Y$) descrevem um esquema regularizador para a inversão de A que verifica $\|R_\alpha\| \leq c(\alpha)$.

Demonstração. Vejamos primeiro que

$$\|R_\alpha g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q(\alpha, \mu_n)|^2}{\mu_n^2} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \|f_n\| \quad (2.15)$$

como $\|f_n\| = 1$ e $|q(\alpha, \mu_n)| \leq c(\alpha)\mu_n$ temos

$$\|R_\alpha g\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\alpha)^2 \mu_n^2}{\mu_n^2} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \leq c(\alpha)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 = c(\alpha)^2 \|g\|^2$$

logo

$$\|R_\alpha\| = \sup_{g \neq 0} \frac{\|R_\alpha g\|}{\|g\|} \leq c(\alpha). \quad (2.16)$$

Por outro lado

$$R_\alpha A f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_n)}{\mu_n} \langle A f, \phi_n \rangle f_n$$

e como $\langle A f, \phi_n \rangle f_n = \langle f, A^* \phi_n \rangle f_n = \mu_n \langle f, f_n \rangle f_n$ temos

$$R_\alpha A f = \sum_{n=1}^{\infty} q(\alpha, \mu_n) \langle f, f_n \rangle f_n$$

usando a expansão de f ficamos com

$$R_\alpha A f - f = \sum_{n=1}^{\infty} (q(\alpha, \mu_n) - 1) \langle f, f_n \rangle f_n$$

o que implica

$$\|R_\alpha A f - f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |q(\alpha, \mu_n) - 1|^2 |\langle f, f_n \rangle|^2$$

□

2.4 Regularização de Tikhonov

Podemos utilizar o teorema anterior para mostrarmos que o esquema de Tikhonov é um esquema regularizador.

Teorema 2.12. *Seja $A : X \rightarrow Y$ um operador linear injetivo e compacto, e (μ_n, f_n, ϕ_n) um sistema singular associado. Para cada $\alpha > 0$ o operador $U_\alpha = \alpha I + A^*A : X \rightarrow X$ é bijetivo com inversa contínua, e o esquema de Tikhonov*

$$R_\alpha = U_\alpha^{-1} A^*$$

é um esquema de regularização verificando $\|R_\alpha\| < \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

Demonstração. Basta reparar que $U_\alpha^{-1} = (\alpha I + A^*A)^{-1}$ pode ser descrito no sistema singular através de

$$U_\alpha^{-1} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha + \mu_n^2} \langle f, f_n \rangle f_n \quad (2.17)$$

pois $U_\alpha f_n = (\alpha I + A^*A) f_n = \alpha f_n + \mu_n^2 f_n = (\alpha + \mu_n^2) f_n$. Logo, sendo

$$R_\alpha g = U_\alpha^{-1} A^* g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha + \mu_n^2} \langle A^* g, f_n \rangle f_n \quad (2.18)$$

como $\langle A^* g, f_n \rangle = \langle g, A f_n \rangle = \mu_n \langle g, \phi_n \rangle$ temos

$$R_\alpha g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\alpha + \mu_n^2} \langle g, \phi_n \rangle f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_n)}{\mu_n} \langle g, \phi_n \rangle f_n$$

com $\frac{q(\alpha, \mu)}{\mu} = \frac{\mu}{\alpha + \mu^2}$. A função q assim definida verifica as propriedades do teorema anterior (é limitada, o limite é 1) em particular $c(\alpha) < \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, porque $2\sqrt{\alpha}\mu \leq \alpha + \mu^2$. \square

Observação 2.13. A regularização de Tikhonov pode ser encarada como um problema de otimização com restrições:

(i) Princípio de Morozov. Dado $\delta > 0$ minimiza-se a norma $\|f\|$ com a restrição $\|Af - g\| \leq \delta$.

(ii) Quasi-soluções. Dado $\rho > 0$ minimiza-se $\|Af - g\|$ com a restrição $\|f\| < \rho$.

2.5 Regularidade das Estratégias

- Esquema de Truncatura Espectral
 - Regularidade do princípio de discrepância de Morozov.

Teorema 2.14. *Seja $A : X \rightarrow Y$ um operador linear injetivo compacto com imagem densa $A(\bar{X}) = Y$. Seja $g \in A(X)$ e seja $g_\delta \in Y$ satisfazendo $\|g_\delta - g\| \leq \delta$. Dado $\gamma > 1$ existe um inteiro $m(\delta)$ tal que se verifica*

$$\|AR_{\alpha(\delta)}g_\delta - g_\delta\| \leq \gamma\delta \quad (2.19)$$

para $\alpha(\delta) = \frac{1}{m(\delta)}$ e temos, quando $\delta \rightarrow 0$,

$$R_{\alpha(\delta)}g_\delta \rightarrow A^{-1}g_\delta. \quad (2.20)$$

Demonstração. cf. [4]. □

- Esquema de Tikhonov
 - Regularidade do princípio de discrepância de Morozov.

Teorema 2.15. *Seja $A : X \rightarrow Y$ um operador linear injetivo compacto com imagem densa $A(\bar{X}) = Y$. Seja $g \in A(X)$ e seja $g_\delta \in Y$ satisfazendo $\|g_\delta - g\| \leq \delta < \|g_\delta\|$. Então existe um único $\alpha(\delta)$ tal que se verifica*

$$\|AR_{\alpha(\delta)}g_\delta - g_\delta\| \leq \gamma\delta \quad (2.21)$$

e temos, quando $\delta \rightarrow 0$,

$$R_{\alpha(\delta)}g_\delta \rightarrow A^{-1}g_\delta. \quad (2.22)$$

Demonstração. cf. [4] □

- Quasi-soluções
 - Relação com o Esquema de Tikhonov.

Lema 2.16. *Seja $A : X \rightarrow Y$ um operador linear injetivo compacto e seja $\rho > 0$.*

Então para cada $g \in Y$ existe um único elemento $f_0 \in X$ com $\|f_0\| \leq \rho$ satisfazendo

$$\|Af_0 - g\| \leq \|Af - g\|, \quad \text{para todo } \|f\| \leq \rho. \quad (2.23)$$

Ao elemento f_0 designamos quasi-solução de $Af = g$ com a restrição ρ .

Teorema 2.17. *Seja $A : X \rightarrow Y$ um operador linear injetivo compacto com imagem densa $A(\overline{X}) = Y$. Seja g tal que*

$$g \notin V = \{Af : \|f\| \leq \rho\}. \quad (2.24)$$

Então a quasi-solução f_0 verifica $\|f_0\| = \rho$ e existe um único $\alpha > 0$ tal que

$$(\alpha I + A^*A)f_0 = A^*g. \quad (2.25)$$

Demonstração. cf. [4].

□

3 Problemas inversos de fontes

Consideramos neste capítulo o problema de detecção de fontes, exemplificando com a situação de detecção de fontes térmicas ou eléctricas, modeladas pela equação de Poisson.

Por exemplo, consideramos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

onde é desconhecida fonte térmica f , mas são conhecidos os valores de temperatura impostos sobre a fronteira.

Nesta situação pretende-se determinar f através dos dados de Cauchy sobre a fronteira, ou seja

$$\begin{cases} u = g & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u = g_n & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

Para o problema (3.1), $u = g$ é dado, e o valor $\partial_n u = g_n$ é medido, mas a situação também pode ser inversa. Interessa que dispomos de ambas as informações na fronteira.

3.1 Teoremas para a identifiabilidade

Para analisarmos a questão de identifiabilidade, ou seja, para garantir que os dados de Cauchy que dispomos sobre $\gamma \subset \partial\Omega$ são suficientes para determinar o número, localização e intensidade dos pontos fonte, iremos usar alguns resultados clássicos em equações diferenciais.

Teorema 3.1. (*Cauchy-Kovalevskaya*) Para $|\alpha| + \beta \leq m, \beta < m$, e com F analítica na vizinhança de $(0, 0, 0)$, define-se a equação diferencial ordinária,

$$\partial_t^m u(t, x) = F(t, x, \partial_x^\alpha \partial_t^\beta u)$$

com condições de Cauchy analíticas

$$u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x), \dots, \partial_t^{m-1} u(0, x) = u_{m-1}(x).$$

Então existe uma e uma única solução u que seja analítica na vizinhança de $(0, 0)$.

Observação 3.2. Por exemplo, no caso em que $m = 2$, que nos interessa, temos

$$\partial_t^2 u(t, x) = F(t, x, u, \nabla u, \nabla^2 u, \partial_t u, \partial_t \nabla u)$$

com condições de Cauchy $u(0, x) = u_0(x)$, $\partial_t u(0, x) = u_1(x)$, onde u_0 e u_1 são analíticas.

Se a dependência se verificar apenas em u , ou seja

$$\partial_t^2 u(t, x) = F(u, \nabla u, \nabla^2 u, \partial_t u, \partial_t \nabla u) \quad (3.3)$$

e se $u_0 = u_1 = 0$, então $u = 0$. Isto deve-se a $u = 0$ ser solução analítica, e segundo o Teorema de Cauchy-Kovalevskaya ser a única analítica.

De seguida, enunciamos apenas o Teorema de Holmgren apenas para operadores elípticos de segunda ordem, sendo a sua extensão para ordem superior imediata, bem como a extensão a outros tipos de operadores (desde que γ não intersecte uma hipersuperfície característica de D em nenhum ponto).

Teorema 3.3. (*Holmgren*). *Seja D um operador diferencial elíptico de segunda ordem com coeficientes analíticos*

$$Du(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u(x) \quad (3.4)$$

numa vizinhança $V = V_- \cup \gamma \cup V_+$, onde γ é uma hipersuperfície regular (pelo menos C^2).

Se $Du = 0$ em V e $u = 0, \partial_n u = 0$ sobre γ , então $u = 0$ em V .

Demonstração. Aplicamos o Teorema de Cauchy-Kovalevskaya, colocando a variável temporal ao longo da direcção normal à superfície γ . Pela forma de $Du = 0$ em (3.4), em todos os termos dependem de u , a equação diferencial passa a poder ser escrita na forma (3.3) e as condições iniciais nulas resultam de $u = 0, \partial_n u = 0$ em γ .

Pelo Teorema de Cauchy-Kovalevskaya u é assim nula na vizinhança de $t = 0$, onde $t = 0$ corresponde à parametrização de γ na direcção da normal. \square

Teorema 3.4. (*continuação analítica*). *Seja u uma função analítica num conjunto conexo, analítico, Ω , e consideremos um conjunto aberto (na topologia de Ω) $\omega \subset \Omega$, tal que*

$$u = 0 \text{ em } \omega,$$

então $u = 0$ em Ω .

Demonstração. Entre um qualquer ponto $x \in \Omega$ e um certo $y \in \omega$ há um caminho analítico $\sigma(t)$, com $t \in [0, 1]$:

$$\sigma(0) = y, \sigma(1) = x.$$

A função $u(\sigma(t))$ é analítica, e é nula quando $\sigma(t) \in \omega$, ou seja, num intervalo $t \in [0, \epsilon[$. Portanto é nula em todo o intervalo $[0, 1]$, o que implica $u(x) = 0$. \square

Teorema 3.5. (*regularidade*). *Seja D um operador diferencial elíptico de segunda ordem com coeficientes de classe C^{q+1} num aberto Ω onde se verifica $Du = f$ com $f \in H^q(\Omega)$ então $u \in H^{q+2}(\Omega)$. Além disso, se os coeficientes de D e f forem funções analíticas então u é analítica em Ω .*

Demonstração. (e.g. [5]) \square

3.2 Limitações na determinação da fonte

Quando $f \in L^2(\Omega)$, temos $\Delta f \in H^{-2}(\Omega)$ e aplicando o laplaciano em ambos os lados da equação, podemos considerar o problema de 4^a ordem para o bilaplaciano:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \Delta f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u = g_n & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

Suponhamos agora que temos medições iguais sobre a fronteira, mas com fontes diferentes

$$\begin{cases} \Delta^2 u_1 = \Delta f_1 & \text{em } \Omega \\ u_1 = g & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u_1 = g_n & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta^2 u_2 = \Delta f_2 & \text{em } \Omega \\ u_2 = g & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u_2 = g_n & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

daqui resulta para $u = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \Delta(f_1 - f_2) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

Este problema homogéneo com o bilaplaciano tem solução nula se e só se

$$\Delta(f_1 - f_2) = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Portanto, concluímos que a fonte só poderá ser determinada de forma única se a diferença entre os valores da fonte for uma função harmónica.

Observação 3.6. Este problema de identificação assume que a fonte f tem regularidade. Pode não ocorrer para outro tipo de fontes.

Em particular, a identificação foi mostrada ser única por Novikov (1934), num problema de gravimetria (cf. [7]) se assumirmos que as fontes são funções característica da forma

$$f = \chi_\omega$$

onde χ_ω é a função característica de um subconjunto convexo $\omega \subset \Omega$.

Por outro lado, também temos unicidade de identificação quando f é uma combinação linear de pontos fonte, resultado que iremos ver.

Exemplo 3.7. Podemos estabelecer um contra-exemplo relativamente à unicidade mesmo com uma fonte analítica

$$f(x) = 8 - 16\|x\|^2 \tag{3.7}$$

notando que o problema de Poisson em $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } B(0, 1) \\ u = 0 & \text{em } \partial B(0, 1) \end{cases}$$

tem $u(x) = 2\|x\|^2 - \|x\|^4 - 1$ como solução única.

Neste caso, como $\nabla u(x) = 4x(1 - \|x\|^2) = 0$, quando $\|x\| = 1$, e a derivada normal seria também nula, $\partial_n u(x) = 0$.

Portanto, o par de Cauchy é nulo, e não distingue a fonte nula desta fonte f aqui apresentada.

Observação 3.8. Para efeitos de cálculo é conveniente usar as igualdades formais em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$,

$$\nabla \|x\| = \frac{x}{\|x\|}, \quad \nabla \|x\|^p = px\|x\|^{p-2}, \quad \Delta \|x\|^p = p(p + N - 2)\|x\|^{p-2} \tag{3.8}$$

3.3 Identificação de pontos fontes

3.3.1 Problema directo

Consideremos um domínio Ω em cujo interior estão colocados um certo número de pontos fonte definido por uma lista ordenada de pontos $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_m\}$ correspondente às localizações e uma lista de pontos $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_m\}$ que são as respectivas intensidades.

O problema inverso que iremos considerar corresponde a determinar o número m de fontes pontuais, a sua localização definida pelo conjunto \mathbf{s} e as respectivas intensidades definidas no conjunto \mathbf{a} . Essa reconstrução das fontes pontuais é feita a partir do conhecimento de dados na fronteira do domínio (ou numa parte da fronteira), ou seja em $\gamma \subset \Gamma = \partial\Omega$.

Assim, o problema directo consiste em determinar u solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = \mathbf{a} \cdot \delta_{\mathbf{s}} = \sum_{k=1}^m a_k \delta_{s_k} & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.9)$$

e mais concretamente na determinação de $\partial_n u$ em γ que serão consideradas como as medições efectuadas.

Para a resolução do problema directo consideramos primeiro a solução fundamental do operador de Laplace em 2D,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x|, \quad (3.10)$$

que verifica $\Delta\Phi = \delta$, e portanto $\Delta_x\Phi(x-s) = \delta_s(x) = \delta(x-s)$.

Assim, obtemos uma solução particular

$$v(x) = \sum_{k=1}^m a_k \Phi(x-s_k) \quad (3.11)$$

que no entanto não verifica a condição na fronteira (pois $v|_{\Gamma}$ não é necessariamente g_0). Para isso, é necessário considerar um problema de Laplace auxiliar

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega \\ w = g - v & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.12)$$

sendo claro que $u = v + w$ verificará então o problema (3.9).

3.3.2 Problema inverso - identifiabilidade

Teorema 3.9. (*identifiabilidade*): *Considere u e \tilde{u} soluções do problema (P) para listas de pontos fonte $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_m\}$ e $\tilde{\mathbf{s}} = \{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{\tilde{m}}\}$ com intensidades $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_m\}$ e $\tilde{\mathbf{a}} = \{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{\tilde{m}}\}$, respectivamente.*

Se $u|_{\gamma} = \tilde{u}|_{\gamma}$ e $\partial_n u|_{\gamma} = \partial_n \tilde{u}|_{\gamma}$ então $m = \tilde{m}$, e $\mathbf{s} \cong \tilde{\mathbf{s}}$, $\mathbf{a} \cong \tilde{\mathbf{a}}$ (onde o símbolo \cong se refere a uma identificação a menos de uma permutação de índices da lista).

Demonstração. Seja $v = u - \tilde{u}$. Por um lado v verifica

$$\Delta v = \mathbf{a} \cdot \delta_{\mathbf{s}} - \tilde{\mathbf{a}} \cdot \delta_{\tilde{\mathbf{s}}} = f$$

em que f é nula (logo analítica) em $B = \Omega \setminus (\mathbf{s} \cup \tilde{\mathbf{s}})$.

Por outro lado, $v = \partial_n v = 0$ em γ , logo pelo Teorema de Holmgren aplicado a γ e a uma vizinhança $\omega \supset \gamma$ temos $v = 0$ em $\omega \cap \Omega$.

Assim, por continuação analítica temos $v = 0$ em B o que só pode acontecer se o segundo membro f for nulo, ou seja,

$$f = a_1 \delta_{s_1} + \cdots + a_m \delta_{s_m} - \tilde{a}_1 \delta_{\tilde{s}_1} + \cdots + \tilde{a}_{\tilde{m}} \delta_{\tilde{s}_{\tilde{m}}} = 0$$

em B . Ora pela independência linear das combinações de deltas de Dirac isto implica que o número, a localização e as intensidades das fontes pontuais têm que coincidir. \square

3.4 Funcional de Reciprocidade

Definimos um funcional de reciprocidade, definido sobre uma fronteira $\Gamma = \partial\Omega$,

$$\mathcal{R}(u, v) = \int_{\Gamma} v(x) \partial_n u(x) - u(x) \partial_n v(x) ds_x \quad (3.13)$$

sugerido por Caldéron e depois usado por Andrieux e Ben Abda.

Pela segunda fórmula de Green sabemos que

$$\int_{\partial\Omega} (v \partial_n u - u \partial_n v) ds_x = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx. \quad (3.14)$$

Teorema 3.10. *Se $\Delta u = f$ e escolhendo funções teste $v : \Delta v = 0$, obtemos*

$$\mathcal{R}(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (3.15)$$

Demonstração. Aplicação imediata de (3.14), pois

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u, v) &= \int_{\partial\Omega} (v \partial_n u - u \partial_n v) ds_x \\ &= \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx \\ &= \int_{\Omega} v f dx = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

\square

Exemplo 3.11. No caso dos pontos fonte, $f = \mathbf{a} \cdot \delta_{\mathbf{s}}$, e assim

$$\mathcal{R}(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathbf{a} \cdot \delta_{\mathbf{s}}, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \mathbf{a} \cdot v(\mathbf{s}) \quad (3.16)$$

onde $v(\mathbf{s}) = (v(s_1), \dots, v(s_m))$.

3.4.1 Método de El Badia - Ha Duong para fontes pontuais

El Badia e Ha Duong propuseram um método para a localização de fontes pontuais usando polinômios harmônicos em \mathbb{C} . Com efeito, escolhendo

$$v(z) = z^k$$

obtemos para o caso de fontes pontuais, de (3.16),

$$\mathcal{R}(u, z^k) = \mathbf{s}^k \cdot \mathbf{a}$$

considerando $k = 0, \dots, M$. Isto leva a um sistema de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^M & s_2^M & \cdots & s_m^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}(u, 1) \\ \mathcal{R}(u, z) \\ \vdots \\ \mathcal{R}(u, z^M) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A determinação da característica da matriz permite avaliar o número de fontes. Este sistema é não linear e mal condicionado, porque a localização das fontes $s_k \in \mathbb{C}$ é desconhecida, tal como são as intensidades.

No caso mais simples, em que sabemos existir apenas um ponto fonte, $s \in \mathbb{C}$, a sua localização e intensidade pode ser facilmente obtida.

Proposição 3.12. *Pela identificação de \mathbb{R}^2 com \mathbb{C} , um único ponto fonte, $f = a\delta_s$, é determinado por*

$$a = \mathcal{R}(u, 1), \quad s = \mathcal{R}(u, z)/a.$$

Demonstração. Primeiro, resulta de (3.17) com $M = 0, m = 1$ que

$$a = \mathcal{R}(u, 1),$$

depois com $M = 1, m = 1$, temos $a s = \mathcal{R}(u, z)$, obtendo-se s . □

3.4.2 Determinação de fontes harmônicas

Se admitirmos que as fontes são harmônicas, isto é $\Delta f = 0$, então a caracterização de (3.15)

$$\mathcal{R}(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

pode ser aplicada a uma base de

$$\mathcal{H} = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v = 0\}, \quad (3.18)$$

que é um espaço separável. Sendo essa base

$$v_0, v_1, \dots, v_n, \dots$$

então podemos escrever $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k$ obtendo-se

$$\mathcal{R}(u, v_j) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \langle v_k, v_j \rangle_{L^2(\Omega)}$$

o que nos leva a um sistema normal para a identificação dos coeficientes c_k que definem a fonte harmônica.

Observação 3.13. Por exemplo, tomando uma base de polinômios harmônicos, em \mathbb{R}^2 com a identificação a \mathbb{C} , podemos considerar de novo $v_k(z) = z^k$, ou na forma polar

$$v_k(z) = r^k e^{ik\theta},$$

e nesse caso considerando $\Omega = B(0, R)$

$$\langle v_k, v_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} v_k(z) \bar{v}_j(z) dz = \int_0^R r^{k+j} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\theta} d\theta dr,$$

$$\mathcal{R}(u, v_j) = \langle f, v_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(z) \bar{v}_j(z) dz = \int_0^R r^j \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ij\theta} d\theta dr.$$

Notando que, neste caso complexo, estamos a considerar

$$\mathcal{R}(u, v) = \int_{\Gamma} \partial_n u(x) \bar{v}(x) - u(x) \partial_n \bar{v}(x) ds_x.$$

Observação 3.14. Esta simplificação por redução a um problema de mínimos quadrados só é possível neste caso em que há uma dependência linear da fonte f . Não é aplicável ao caso das fontes pontuais, porque apesar da dependência nas intensidades a_k ser linear (e nessa situação temos no sistema (3.17) um simples problema de interpolação com a matriz de Vandermonde), já a dependência nas localizações s_k é não linear.

3.4.3 Estabilidade do problema inverso de fontes

Para uma análise de estabilidade do problema inverso de fontes, devemos considerar uma perturbação de f , mas quando o problema directo é da forma

$$\mathcal{P} : \mathcal{H} \longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega) \quad (3.19)$$

$$f \mapsto \partial_n u = g_n \quad (3.20)$$

que é linear, sabemos que o problema de Poisson é bem posto

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = O(\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)})$$

e em particular, como $\|\partial_n u\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = O(\|u\|_{H^1(\Omega)})$

$$\|\partial_n u\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = O(\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}) + O(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}) \quad (3.21)$$

ou seja $\|\mathcal{P}(u)\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = O(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)})$, e o problema \mathcal{P} está bem posto.

Na situação inversa, em que pretendemos determinar $f = \mathcal{P}^{-1}(g_n)$ sabemos que se aplica o problema com o bilaplaciano (3.5)

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \Delta f = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u = g_n & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.22)$$

e este problema também é bem posto

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = O(\|g\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} + \|g_n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})$$

permitindo determinar $f = \Delta u$,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = O(\|g\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} + \|g_n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}) \quad (3.23)$$

mas neste caso ajustando a regularidade.

3.5 Problemas inversos de inclusões ou cavidades

Um problema semelhante na formulação e tratamento, mas razoavelmente diferente na essência, ocorre quando ao invés de fontes, consideramos obstáculos internos que são inclusões ou cavidades.

Definição 3.15. Um obstáculo interno à propagação $\omega \subset \Omega$ é uma reunião de conjuntos abertos simplesmente conexos. Dizemos que é uma ω é *inclusão* quando sobre $\partial\omega$ se aplica uma condição de fronteira de Dirichlet, e que ω é uma *cavidade* quando sobre $\partial\omega$ se aplica uma condição de fronteira de Neumann.

No caso de inclusões aplica-se o seguinte problema directo para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \setminus \bar{\omega} \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \\ u = C & \text{em } \partial\omega \end{cases} \quad (3.24)$$

Há aqui duas fronteiras - uma que se assume como interior $\partial\omega$, e outra exterior $\partial\Omega$, onde serão feitas as medições.

No caso térmico, g é uma temperatura imposta no exterior, e assume-se que se conhece a temperatura interior C , constante. A partir da medição $\partial_n u$ procuramos determinar ω , a fronteira interna desconhecida.

Pela aplicação do funcional de reciprocidade neste caso obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u, v) &= \int_{\partial\Omega} (v\partial_n u - u\partial_n v) \, ds_x \\ &= \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (v\Delta u - u\Delta v) \, dx + \int_{\partial\omega} (v\partial_n u - u\partial_n v) \, ds_x \\ &= \int_{\partial\omega} (v\partial_n u - C\partial_n v) \, ds_x \end{aligned}$$

notando que a orientação da normal muda em $\partial\omega$ (porque sendo exterior a ω é interior a $\Omega \setminus \bar{\omega}$).

Num caso habitual, em que $C = 0$, ficamos simplesmente com

$$\mathcal{R}(u, v) = \int_{\partial\omega} (v\partial_n u) \, ds_x. \quad (3.25)$$

3.5.1 Unicidade da inclusão

Podemos ver que apenas com uma medição é possível determinar a forma da inclusão.

Teorema 3.16. *Sejam u_1 e u_2 as soluções de (3.24) associadas às inclusões ω_1 e ω_2 (respectivamente).*

Se $u_1 = u_2 = g \neq C$ e $\partial_n u_1 = \partial_n u_2$ em $\partial\Omega$ então $\omega_1 = \omega_2$.

Demonstração. Pelo Teorema de Holmgren, a coincidência dos dados de Cauchy em $\partial\Omega$, implica que

$$u_1 = u_2 \text{ em } \Omega_{12} = [\Omega \setminus (\omega_1 \cup \omega_2)]_\Omega$$

onde $[\cdot]_\Omega$ se refere à componente conexa com fronteira $\partial\Omega$.

Assim, consideramos agora

$$\omega_{12} = \Omega \setminus \bar{\Omega}_{12}, \quad \omega_C = \omega_{12} \setminus \bar{\omega}_1$$

notando que $\partial\omega_C \subset \partial\omega_1 \cup (\partial\omega_2 \cap \partial\Omega_{12})$.

Temos $u_1 = C$ em $\partial\omega_1$, mas também $u_1 = u_2 = C$ em $\partial\omega_2 \cap \partial\Omega_{12}$.

Por isso, concluímos que u_1 verifica em ω_C o problema de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{em } \omega_C \\ u_1 = C & \text{em } \partial\omega_C \end{cases}$$

cuja solução trivial é $u_1 = C$ em ω_C . Por continuação analítica de u_1 obtemos $u_1 = C$ em Ω_{12} e conseqüentemente $g = C$ em $\partial\Omega$, o que não se pode verificar por hipótese. \square

Observação 3.17. A aplicação do Teorema de Holmgren não necessita da confirmação de que $u_1 = u_2$ e $\partial_n u_1 = \partial_n u_2$ em $\partial\Omega$, bastando serem iguais numa pequena parte da fronteira $\gamma \subset \partial\Omega$.

3.5.2 Determinação da inclusão

A determinação da forma da inclusão já revela um problema essencialmente diferente dos anteriores. Numa situação simplificada em que a fronteira de ω pode ser descrita como um estrelado, ou seja, com base num ponto $x_\omega \in \omega$, definimos

$$\partial\omega = \{x_\omega + r_\omega(\theta)\theta : \theta \in \partial B(0, 1)\} \quad (3.26)$$

então a determinação da solução do problema inverso resume-se a recuperar a função radial $r_\omega > 0$.

O problema directo é aqui dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : C^2(\partial B(0, 1)) &\longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ r_\omega &\mapsto \partial_n u = g_n \end{aligned}$$

Em 2D podemos assumir que a função r_ω é descrita por uma expansão de Fourier

$$r_\omega(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^K a_{2k} \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^K a_{2k-1} \sin(k\theta) \quad (3.27)$$

associando a r_ω um vector de coeficientes $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{2K})$, procurando minimizar

$$\mathbf{b} = \arg \min_{\mathbf{a}} \|\mathcal{P}(r_{\omega(\mathbf{a})}) - g_n\|_{L^2(\gamma)}^2 \quad (3.28)$$

onde $\gamma \subset \partial\Omega$ é a parte da fronteira onde as medições coincidem.

Observação 3.18. A aplicação do método pode usar um método de optimização adequado, sendo considerados normalmente os métodos de Gauss-Newton ou de Levenberg-Marquardt. No entanto, notamos que isto envolve a cada iteração o cálculo de um problema directo para determinar a solução $\mathcal{P}(r_{\omega(\mathbf{a})})$, o que se revela ineficaz.

Note-se ainda que neste caso, se abandonarmos a versão discreta dos coeficientes, revela-se necessário o cálculo da derivada de Fréchet $\mathcal{P}'_{r_\omega}(r_h)$ onde

$$\mathcal{P}(r_{\tilde{\omega}}) - \mathcal{P}(r_\omega) = \mathcal{P}'_{r_\omega}(h) + o(\|h\|)$$

sendo $r_{\tilde{\omega}} = r_\omega + r_h$ onde r_h é uma perturbação radial admissível.

Observação 3.19. Iremos ver outros métodos aplicados ao problema inverso de difracção, que podem ser usados neste contexto com a mesma eficácia. Em particular há aplicações do Método de Kirsch-Kress, ou do método da amostragem linear de Colton-Kirsch que permitem tratar este problema.

3.5.3 Determinação de fissuras

Aqui focámos o problema inverso para a determinação de uma inclusão, mas um tratamento semelhante pode ser efectuado para a determinação de cavidades, ou de obstáculos com outras condições de fronteira.

Um problema inverso com bastantes aplicações em ciência de materiais é a determinação de fissuras, mas nesse caso há adaptações diferentes que devem ser consideradas.

Definição 3.20. Um obstáculo $\gamma \subset \Omega$ diz-se uma *fissura interna* (crack) se $\gamma \subset \partial\omega$ onde ω é um aberto, onde se impõem condições de Neumann

nulas em γ . Por outro lado, é também habitual falar-se em *ecran interno* se impusermos condições de Dirichlet nulas.

No caso de fissuras planas temos o seguinte problema de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \setminus \gamma \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{em } \gamma \end{cases} \quad (3.29)$$

mas para entendermos a natureza diferente deste tipo de problemas, ao contrário da determinação de inclusões (ou de cavidades), um par de medições (g, g_n) não será suficiente para a unicidade da determinação no problema inverso.

Observação 3.21. Esta situação de não unicidade com uma só medida pode ser melhor entendida no caso do ecran, ou seja com o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \setminus \gamma \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \\ u = 0 & \text{em } \gamma \end{cases} \quad (3.30)$$

supondo que $\Omega = B((0, 1), \frac{1}{2})$ e que $\gamma = \partial B(0, 1) \cap B((0, 1), \varepsilon)$ em \mathbb{R}^2 , com $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Ou seja, neste caso o domínio é uma bola que não passa na origem, sendo válida a solução em Ω (resultante da solução fundamental centrada na origem)

$$u(x) = \log \|x\|,$$

mas como $\gamma \subset \partial B(0, 1)$ verifica-se $u(x) = 0$ para $x \in \gamma$, pois $\|x\| = 1$. A solução é sempre a mesma, independentemente do ε que define γ . Por isso, γ não é identificável pelos dados de fronteira definidos por este u .

Isto acontece sempre que γ possa estar incluída numa curva de nível de solução, neste caso γ estava incluída na curva de nível $\{x : \log \|x\| = 0\} = \partial B(0, 1)$. Assim, uma medição não é suficiente, mas é possível mostrar unicidade com mais medições (Alessandrini, ou Alves-Ha Duong-Penzel).

Observação 3.22. No caso de fissuras planas é possível usar o funcional de reciprocidade para obter

$$\mathcal{R}(u, v) = \int_{\gamma} ([u] \partial_n v) ds_x,$$

e como a normal num plano γ é constante, temos $\partial_n v = n \cdot \nabla v$ e sendo $v(x) = d \cdot x$ harmónica (polinómio de grau 1) temos

$$\partial_n v = n \cdot d = 0$$

sempre que $d \perp n$, ou seja quando d está na direcção do plano de γ . Portanto, o funcional de reciprocidade permite determinar a orientação de fissuras planas, e pode ainda ser usado para determiná-las com maior precisão (Andrieux-Ben Abda).

4 Transformadas de Radon e de Raio-X

Introduzimos a Transformação de Radon e a Transformação de Raio-X, como exemplos de aplicação de uma transformação integral na Tomografia Computadorizada (CT).

4.1 Transformação de Radon

Definição 4.1. Seja $f \in C(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto. Definimos a *Transformada de Radon* de f como

$$\mathcal{R}_d f(\rho) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \delta(\rho - d \cdot x) dx \quad (4.1)$$

$$= \int_{d \cdot x = \rho} f(x) dx \quad (4.2)$$

onde d é uma direcção unitária ($\|d\| = 1$), e com $\rho \in \mathbb{R}$.

Isto significa que apenas tomamos a integração no hiperplano definido por $d \cdot x = \rho$. Por exemplo, no caso em que $\rho = 0$, isso corresponde a integrar no plano ortogonal à direcção d .

Podemos incorporar $(d, \rho) = \xi = (\hat{\xi}, \|\xi\|)$ notando que $\xi = \hat{\xi} \|\xi\|$

$$\mathcal{R}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \delta(\|\xi\| - \hat{\xi} \cdot x) dx$$

admitindo neste caso $\rho > 0$.

Proposição 4.2. A adjunta da transformação de Radon é

$$\mathcal{R}^*g(x) = \int_{\|\hat{\xi}\|=1} g(\hat{\xi}, \hat{\xi} \cdot x) d\hat{\xi} \quad (4.3)$$

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \delta(\|\xi\| - \hat{\xi} \cdot x) dx g(\hat{\xi}, \|\xi\|) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \int_{\mathbb{R}^N} \delta(\|\xi\| - \hat{\xi} \cdot x) g(\hat{\xi}, \|\xi\|) d\xi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \int_{\|\xi\|=\hat{\xi} \cdot x} g(\hat{\xi}, \|\xi\|) d\xi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \int_{\|\xi\|=\hat{\xi} \cdot x} g(\hat{\xi}, \hat{\xi} \cdot x) d\xi dx \\
&= \langle f, \mathcal{R}^*g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

notando que o termo $g(\hat{\xi}, \hat{\xi} \cdot x)$ só varia em $\hat{\xi} : \|\hat{\xi}\| = 1$. \square

A transformação de Radon relaciona-se com a transformação de Fourier, definida em dimensão N por

$$\mathcal{F}_N f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad (4.4)$$

notando que $\xi = \hat{\xi} \|\xi\|$.

Proposição 4.3. *Temos*

$$\mathcal{F}_N f(\xi) = \mathcal{F}_1(\mathcal{R}_{\hat{\xi}} f)(\|\xi\|) \quad (4.5)$$

Demonstração. Basta notar que

$$\mathcal{F}_N f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{x \cdot \hat{\xi} = \rho} f(x) dx e^{-i\rho \|\xi\|} d\rho = \mathcal{F}_1(\mathcal{R}_{\hat{\xi}} f)(\|\xi\|).$$

\square

Introduzindo o potencial de Riesz, definido por

$$(\mathcal{I}_\alpha g)(\xi) = \mathcal{F}_N^{-1}(\|\xi\|^{-\alpha} \mathcal{F}_N(g))$$

notamos que, como

$$\mathcal{F}_N(\nabla u)(\xi) = i\xi \mathcal{F}_N(u),$$

temos $\mathcal{F}_N(\Delta u)(\xi) = -\|\xi\|^2 \mathcal{F}_N(u)$ e assim

$$-\Delta^{-\alpha/2} u = \mathcal{F}_N^{-1}(\|\xi\|^{-\alpha} \mathcal{F}_N(u))$$

Temos o seguinte resultado (cf. [11]):

Teorema 4.4. *A inversa da transformada de Radon é dada por*

$$\mathcal{R}^{-1} = c_N \mathcal{R}^* \mathcal{I}_{1-N} \quad (4.6)$$

$$= c_N \mathcal{R}^* \Delta^{(N-1)/2} \quad (4.7)$$

com $c_N = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-N}$. Quando $N = 3$

$$\mathcal{R}^{-1}g = \frac{1}{8\pi^2} \mathcal{R}^* \Delta g \quad (4.8)$$

Observação 4.5. A inversa da Transformada de Radon permite obter o valor de f a partir das medições

$$g(d, \rho) = \mathcal{R}_d f(\rho).$$

4.2 Transformação de Raio-X

A transformação de Raio-X, também designada transformação de John (Fritz John), considera as integrações sobre uma linha - a linha de propagação do Raio-X, ao invés de considerar sobre o hiperplano (no caso bidimensional coincidem).

Definição 4.6. *A Transformada de Raio-X de f é dada por*

$$\mathcal{X}f(x, d) = \int_{\mathbb{R}} f(x + td) dt \quad (4.9)$$

onde d é uma direcção unitária ($\|d\| = 1$), e com $\rho \in \mathbb{R}$.

Considerando

$$u(x, y) = \mathcal{X}f(x, d_y)$$

com

$$d_y = \frac{y - x}{\|y - x\|}$$

ou tendo, de forma equivalente

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x + t(y - x)) dt, \quad (4.10)$$

esta função verifica a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial x_j} \quad (4.11)$$

que é designada “ultra-hiperbólica”.

Observação 4.7. A aplicação em Tomografia Computadorizada coincide no caso bidimensional com a Transformada de Radon.

5 Difraccão de ondas

Consideramos agora o modelo de propagação de ondas acústicas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \Delta u(t, x) \quad (5.1)$$

onde u é a amplitude associada à pressão.

O operador é denominado D'Alembertiano escrevendo-se \square :

$$\square u(t, x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) u(t, x) \quad (5.2)$$

Portanto o problema de difracção acústica em Ω , com condições de fronteira e Dirichlet é dado por

$$(WP) \begin{cases} \square u(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in (t_0, t_f) \times \Omega \\ u(t_0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(t_0, x) = u_1(t), & x \in \Omega \\ u(t, x) = u_D(t, x), & (t, x) \in [t_0, t_f] \times \partial\Omega \end{cases} \quad (5.3)$$

5.1 Equação de Helmholtz

Se assumirmos uma dependência harmónica em tempo, ou seja

$$u(t, x) = e^{i\omega t} v(x), \quad (5.4)$$

reflecte uma separação entre a variável espacial e a temporal, através da frequência $\omega > 0$.

Isto corresponde a uma solução da equação das ondas acústicas se a equação de Helmholtz equation for verificada para v :

$$\Delta v + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 v = 0, \quad (5.5)$$

porque $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i\omega t} v$, pois $c^2 \Delta u = c^2 e^{i\omega t} \Delta v$.

Assim, para ondas em regime harmónico no tempo, o problema transiente é reduzido à equação de Helmholtz. A quantidade $\kappa = \omega/c$ é denominada *número de onda* e coincide com a frequência se assumirmos uma velocidade de propagação $c = 1$.

5.1.1 Frequências de ressonância

A equação de Helmholtz nem sempre garante resultados de unicidade. Por exemplo, no caso unidimensional

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \omega^2 v = 0 \Leftrightarrow v'' + \omega^2 v = 0$$

impondo condições de Dirichlet nulas $v(0) = 0 = v(1)$, no intervalo $[0, 1]$, podemos encontrar uma solução não nula $v(x) = \sin(\pi x)$

$$v'' + \pi^2 v = 0.$$

Portanto há frequências para as quais não existirá unicidade de solução, o que acontece não apenas com $\omega = \pi$ mas com todos $\omega = n\pi$ se $n \in \mathbb{N}$, neste intervalo.

Em 2D a situação é semelhante

$$v(x_1, x_2) = \sin(nx_1) \sin(mx_2) \tag{5.6}$$

verifica a equação de Helmholtz $\omega^2 = n^2 + m^2$, tendo-se $v = 0$ na fronteira de $\Omega = (0, \pi)^2$, pois $\sin(n\pi) = \sin(m\pi) = 0$ quando $n, m \in \mathbb{N}$.

Definição 5.1. As frequências ω para as quais não há unicidade de solução num domínio Ω são designadas *frequências de ressonância*.

No caso do quadrado $\Omega = (0, \pi)^2$ as frequências de ressonância são

$$\omega \in \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \dots, \sqrt{n^2 + m^2}, \dots\} \tag{5.7}$$

e este conjunto é o espectro associado.

Observação 5.2. Um problema interessante consiste em associar um conjunto de frequências de ressonância a uma forma específica. Este foi um famoso problema inverso levantado por Kac in 1966:

Can one hear the shape of a drum? (... podemos ouvir a forma de um tambor?)

- Este problema foi parcialmente resolvido em 1992 (Gordon, Webb, and Wolpert) que construíram um contraexemplo - duas formas poligonais distintas que apresentavam o mesmo conjunto de frequências próprias.

Problemas de Helmholtz interiores

Da discussão anterior concluímos que o problema de Dirichlet (ou Neumann) para a equação de Helmholtz num domínio limitado (interior) Ω

$$\begin{cases} \Delta v + \omega^2 v = 0, & \text{em } \Omega, \\ v = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.8)$$

não tem solução única para um conjunto numerável de frequências de ressonância. No entanto, note-se que a solução existe e é única no caso de outras frequências.

5.2 Problemas de Helmholtz exteriores

O problema exterior é definido no complementar de um conjunto compacto D , a que chamaremos *obstáculo*. Agora o domínio é exterior, ilimitado,

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}.$$

e vamos considerar assim os problemas de Helmholtz exteriores. Para além da fronteira $\partial\Omega = \partial D$ devemos ainda considerar o comportamento assintótico no *infinito*, que funciona como fronteira adicional.

O comportamento assintótico é dado pela *condição de radiação de Sommerfeld* (in 3D)

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u = o(r^{-1}) \quad \text{quando } r = \|x\| \rightarrow \infty, \quad (5.9)$$

condição que é verificada pela solução fundamental de Helmholtz

$$\Phi(x) = \frac{e^{i\omega\|x\|}}{4\pi\|x\|}. \quad (5.10)$$

5.2.1 Ondas incidentes e ondas difractadas

O problema de difracção consiste em avaliar o efeito de uma onda incidente u^{inc} num objecto D que produz uma onda difractada u^{sc} . A onda total é a soma das duas

$$u^{tot} = u^{inc} + u^{sc}.$$

As condições de fronteira habituais são

- Dirichlet

$$u^{tot} = 0 \Leftrightarrow u^{sc} = -u^{inc}, \quad (5.11)$$

- Neumann

$$\frac{\partial u^{tot}}{\partial n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u^{sc}}{\partial n} = -\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \quad (5.12)$$

- Robin

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + iZ \right) u^{tot} = 0$$

onde Z é a função de impedância.

As ondas incidentes são normalmente

- Ondas planas numa direcção d (com $\|d\| = 1$)

$$u^{inc}(x) = e^{i\omega x \cdot d} \quad (5.13)$$

- Ondas esféricas centradas num ponto $y \in \mathbb{R}^3$

$$u^{inc}(x) = \Phi(x - y) = \frac{e^{i\omega \|x-y\|}}{4\pi \|x - y\|}. \quad (5.14)$$

Observação 5.3. As ondas planas verificam a equação de Helmholtz em todo o espaço, pois

$$\nabla \cdot \nabla (e^{i\omega x \cdot d}) = i\omega d \cdot \nabla (e^{i\omega x \cdot d}) = -\omega^2 \|d\|^2 e^{i\omega x \cdot d}$$

sendo $\|d\| = 1$. As ondas esféricas verificam a equação de Helmholtz em todo o espaço, excepto no centro y .

Observação 5.4. Podemos ainda ver que assintoticamente as ondas esféricas comportam-se como ondas planas

$$\Phi(x - y) = \frac{e^{i\omega \|x-y\|}}{4\pi \|x - y\|} = \frac{e^{i\omega \|x\|}}{4\pi \|x\|} \left(e^{-i\omega \frac{x}{\|x\|} \cdot y} + O(\|x\|^{-1}) \right) \quad (5.15)$$

5.2.2 Amplitude limite

A onda difractada deve verificar a equação de Helmholtz no domínio exterior Ω , a condição de fronteira (aqui Dirichlet), e a condição de radiação de Sommerfeld, que assegura a unicidade de solução $u^{sc} \in H_{loc}^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta u^{sc} + \omega^2 u^{sc} = 0, & \text{em } \Omega, \\ u^{sc} = -u^{inc}, & \text{em } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u^{sc}}{\partial r} - i\omega u^{sc} = o(r^{-1}) & \text{quando } r = \|x\| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (5.16)$$

O comportamento assintótico da solução está ligado ao comportamento da solução fundamental.

Definição 5.5. Na expressão

$$u^{sc}(x) = \frac{e^{i\omega\|x\|}}{\|x\|} (u_\infty(\hat{x}) + O(\|x\|^{-1})) \quad (5.17)$$

(onde $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$), a função u_∞ definida na bola $\partial B(0, 1)$ é designada *amplitude limite* (*far field pattern*) de u^{sc} .

De facto, quando $u^{sc}(x) = \Phi(x - y)$ obtemos

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} e^{-i\omega\hat{x}\cdot y}. \quad (5.18)$$

e também, tomando uma combinação linear de ondas esféricas

$$u^{sc}(x) = \sum_m \alpha_m \Phi(x - y_m) \quad (5.19)$$

a corresponde amplitude limite será

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_m \alpha_m e^{-i\omega\hat{x}\cdot y_m}. \quad (5.20)$$

5.2.3 Potenciais de Camada

Através da representação com potenciais de camada simples (ou dupla), podemos escrever

$$u^{sc}(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\psi(y)ds_y \quad (5.21)$$

e isto leva à seguinte expressão da amplitude limite:

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} e^{-i\omega\hat{x}\cdot y}\psi(y)ds_y. \quad (5.22)$$

5.3 Problema inverso - unicidade

De entre os diversos problemas inversos que podem ser considerados, o que ficou clássico consistiu na determinação da forma do obstáculo D pelo conhecimento da amplitude limite para as ondas incidentes. Em particular, considera-se o caso em que medimos

$$u_\infty(d, \theta), \quad \text{com } d, \theta \in \partial B(0, 1)$$

onde d é a direcção de incidência e onde θ é a direcção de medição.

Ainda hoje se encontra em aberto o problema de identificar D apenas com uma onda incidente.

Definição 5.6. Dizemos que D é um obstáculo (à propagação de ondas) se for simplesmente conexo, ou reunião de simplesmente conexos. Diz-se que a fronteira do obstáculo, ∂D , é “suave ao som” (*sound soft*) se verificar a condição de Dirichlet, e “dura ao som” (*sound hard*) se verificar a condição de Neumann.

Teorema 5.7. (*Rellich*) Se $u_\infty = 0$ então $u^{sc}(x) = 0, \forall x \in \Omega$.

Demonstração. Resulta da primeira fórmula de Green. (cf [4]) □

Corolário 5.8. Se a amplitude limite coincide a onda difractada coincide até às fronteiras comuns. Ou seja, sendo u_1^{sc}, u_2^{sc} associadas à difracção pelos obstáculos D_1 e D_2 (respectivamente), se $u_{1,\infty} = u_{2,\infty}$ então $u_1^{sc} = u_2^{sc}$ em $(\Omega_1 \cap \Omega_2)_\infty$, onde $(\Omega_1 \cap \Omega_2)_\infty$ representa a componente conexa ilimitada de $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Demonstração. Resulta directamente do Teorema de Rellich. □

Observação 5.9. A identificação das amplitudes limites não é necessária ser colocada em toda a esfera, basta num seu aberto, porque a amplitude limite é uma função analítica, que fica definida de forma única nesse conjunto. Deste corolário podemos concluir a identificação se os objectos não se intersectarem, porém não noutros casos.

5.3.1 Unicidade do problema de difracção

A primeira demonstração de unicidade relativa ao problema de difracção foi considerada noutro contexto por Schiffer - eram conhecidas várias frequências.

Colton e Sleeman adaptaram essa demonstração para o caso em que as condições de fronteira eram de Dirichlet, mas o problema de Neumann apresentava dificuldades resultantes de um espectro contínuo para fronteiras cúspidas - que poderiam ocorrer na intersecção. A demonstração final para o problema de Neumann foi dada por Kirsch e Kress com base numa demonstração de Isakov.

Para esse efeito começamos por enunciar um lema que garante que uma qualquer incidência $u^{inc} = g$ em $\partial\Omega = \partial D$, pode ser simulada por combinação de ondas planas incidentes.

Lema 5.10. *Seja ω uma frequência que não é de ressonância em D , então o conjunto*

$$S = \text{span}\{e^{i\omega d \cdot x}|_{x \in \partial D} : d \in \partial B(0, 1)\}$$

é denso em $L^2(\partial D)$.

Demonstração. Consideramos a representação em potencial de camada simples

$$u^{sc}(x) = \mathcal{L}\psi(x) = 4\pi \int_{\partial D} \Phi(x - y)\psi(y)ds_y$$

cuja amplitude limite é dada por

$$u_\infty(-d) = \int_{\partial D} e^{i\omega d \cdot y}\psi(y)ds_y = \langle e^{i\omega d \cdot y}, \psi \rangle_{L^2(D)}.$$

Portanto se $\langle e^{i\omega d \cdot y}, \psi \rangle_{L^2(D)} = 0, \forall d \in \partial B(0, 1)$, isto significa que $u_\infty = 0$, e pelo Teorema de Rellich

$$u^{sc}(x) = 0, \quad (x \in \Omega)$$

o que significa o traço exterior é nulo, ou seja temos

$$u_+^{sc} = 0, \quad \partial_n u_+^{sc} = 0,$$

e por outro lado como $\mathcal{L}\psi$ é contínuo $u_-^{sc} = u_+^{sc} = 0$. A expressão $\mathcal{L}\psi$ não pode ser nula no interior D porque ω não é frequência de ressonância. Conclui-se que $\psi = 0$. Desta forma fica provada a densidade em $L^2(\partial D)$. \square

Teorema 5.11. (*Kirsch-Kress-Isakov*) Seja $u_{k,\infty}(d, \theta)$ a amplitude limite gerada por um obstáculo D_k , com condições de Dirichlet ou Neumann.

$$u_{1,\infty} = u_{2,\infty} \implies D_1 = D_2$$

Demonstração. Provamos o caso Dirichlet.

Pelo corolário do Teorema de Rellich temos

$$u_1^{sc}(d, x) = u_2^{sc}(d, x), \quad \forall d \in \partial B(0, 1), \forall x \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)_\infty.$$

Assumindo que $\partial D_1 \neq \partial D_2$ existe $\Gamma_1 \subset \partial D_1, \Gamma_1 \subset \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)_\infty$ e consideramos $x^* \in \Gamma_1 \setminus \partial D_2$.

Usamos agora o anterior lema de densidade que permite simular o efeito da incidência de uma qualquer onda esférica em ∂D_1 . Ou seja, sendo

$$u_y^{inc}(x) = \Phi(x - y)$$

com $y \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)_\infty$, podemos simular u^{inc} em ∂D_1 por uma combinação de ondas planas incidentes.

Pela condição de Dirichlet

$$\begin{aligned} u_1^{sc}(y, x) &= -u_y^{inc}(x) = -\Phi(x - y) = - \sum_{d \in \partial B(0,1)} \alpha_d e^{i\omega d \cdot x} \\ &= - \sum_{d \in \partial B(0,1)} \alpha_d u_1^{sc}(d, x) = - \sum_{d \in \partial B(0,1)} \alpha_d u_2^{sc}(d, x) = u_2^{sc}(y, x). \end{aligned}$$

Ou seja, obtemos

$$u_1^{sc}(y, x) = u_2^{sc}(y, x), \quad \forall x, y \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)_\infty.$$

Tomamos agora

$$y_m = x^* + \frac{1}{m} \mathbf{n}(x^*) \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)_\infty$$

notando que $y_m \rightarrow x^*$, e assim

$$u_1^{sc}(y_m, x) = u_2^{sc}(y_m, x)$$

Porém, tomando também $x = y_k$ vemos que

$$\begin{cases} \lim_m \lim_k u_1^{sc}(y_m, y_k) = \lim_m u_1^{sc}(y_m, x^*) = - \lim_m u_1^{inc}(y_m, x^*) \\ \quad = - \lim_m \Phi(y_m - x^*) = -\Phi(x^* - x^*) = \infty \\ \lim_m \lim_k u_2^{sc}(y_m, y_k) = u_2^{sc}(x^*, x^*) \end{cases}$$

Ora, como $x^* \in \Omega_2$ o valor $u_2^{sc}(x^*, x^*)$ está bem definido, ou seja $|u_2^{sc}(x^*, x^*)| < \infty$, o que contradiz a igualdade dos limites. Conclui-se que $\partial D_1 = \partial D_2$. \square

5.4 Métodos numéricos no Problema Inverso de difração

Para efeitos da determinação da fronteira do obstáculo podem ser considerados diversos métodos numéricos.

5.4.1 Método de Kirsch-Kress

Começamos pelo *método da aproximação do campo difractado*, mais habitualmente designado Método de Kirsch-Kress.

A ideia consiste em assumir um conjunto interno $G \subset D$ e definimos em $\gamma = \partial G$ um potencial de camada simples:

$$v(x) = \mathcal{L}_\gamma \psi(x) = \int_\gamma \Phi(x-y)\psi(y)ds_y \quad (5.23)$$

sabendo que a amplitude limite será

$$v_\infty(\theta) = \mathcal{L}_\gamma^\infty \psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma e^{-i\omega\theta \cdot y} \psi(y) ds_y. \quad (5.24)$$

Por outro lado, temos a amplitude realmente medida, u_∞^{sc} e queremos que ambas coincidam.

Ou seja, pretendemos encontrar ψ tal que $u_\infty^{sc} = v_\infty = \mathcal{L}_\gamma^\infty \psi$. A resolução da equação integral

$$u_\infty^{sc} = \mathcal{L}_\gamma^\infty \psi \quad (5.25)$$

define v até ao domínio interior $G \subset D$, e podemos determinar ∂D como sendo o lugar onde $v = -u^{inc}$, a condição de fronteira de Dirichlet.

Portanto

$$\partial D = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus G : (\mathcal{L}_\gamma \psi + u^{inc})(x) = 0\}. \quad (5.26)$$

Observação 5.12. Esta última parte - encontrar $x : (\mathcal{L}_\gamma \psi + u^{inc})(x) = 0$ é uma equação não linear e pode ser resolvida radialmente.

Por outro lado, no caso de condições de fronteira de Neumann, já não é possível o mesmo tratamento (por desconhecimento do vector normal), e é preferível assumir fronteiras definidas parametricamente, procurando minimizar o valor.

Por exemplo, sendo $\Gamma_{\mathbf{a}}$ uma curva definida por parâmetros $(a_0, \dots, a_m) = \mathbf{a}$, procuramos

$$\mathbf{a} = \arg \min_{\mathbf{a}} \|\mathcal{L}_\gamma \psi + u^{inc}\|_{L^2(\Gamma_{\mathbf{a}})}^2 \quad (5.27)$$

estes parâmetros \mathbf{a} podem resultar de uma expansão da fronteira em série de Fourier, e podem ser determinados por um método de otimização - por exemplo, o método de Levenberg-Marquardt.

Este processo já é facilmente adaptável para o caso de Neumann, mesmo usando a representação de camada simples,

$$\mathbf{a} = \arg \min_a \|\partial_n(\mathcal{L}_\gamma \psi + u^{inc})\|_{L^2(\Gamma_a)}^2. \quad (5.28)$$

Há ainda a vantagem de neste processo se forçar uma regularização, por condicionar as fronteiras admissíveis a alguns parâmetros. Uma estratégia conhecida consiste em começar com apenas um parâmetro (encontrar a melhor bola), e ir aumentando o número de parâmetros iniciando com o melhor resultado anterior.

Observação 5.13. Este método tem uma grande desvantagem - assume que conhecemos suficientemente D para poder definir um conjunto G no seu interior.

Por outro lado, a resolução da equação integral (5.25) é um problema mal posto, e pode ser tratado com os métodos de regularização já apresentados - por exemplo, truncatura espectral ou Tikhonov.

O método tem uma vantagem - usa apenas a amplitude limite obtida por uma única onda incidente, ainda que possam ser adicionadas outras.

5.4.2 Método de Colton-Monk

O Método de Colton-Monk trata-se praticamente de uma variante dual do método anterior, sendo também designado como *método da sobreposição dos campos incidentes*.

A ideia consiste em assumir uma sobreposição de ondas planas incidentes (também chamada *onda de Herglotz*)

$$v^{inc}(x) = \int_{\partial B(0,1)} e^{i\omega d \cdot x} g(d) ds_d = \mathcal{A}g(x) \quad (5.29)$$

a esta onda incidente corresponde um campo difractado com amplitude limite

$$v_\infty(\theta) = \int_{\partial B(0,1)} u_\infty(d, \theta) g(d) ds_d = \mathcal{A}_\infty g(\theta). \quad (5.30)$$

Neste caso, para obter o operador amplitude limite \mathcal{A} é necessário o conhecimento de amplitudes limites para todas as direcções de incidência.

Agora, tal como para o método anterior, o objectivo é resolver a equação integral

$$\mathcal{A}_\infty g = u_\infty^{sc} \quad (5.31)$$

onde u_∞^{sc} é a amplitude limite para alguma onda difractada conhecida.

Um exemplo consiste em tomar uma solução fundamental

$$u^{sc}(x) = \Phi(x - y)$$

desde que $y \in D$, pois nesse caso,

$$u_\infty^{sc}(\theta) = \frac{1}{4\pi} e^{-i\omega\theta \cdot y}. \quad (5.32)$$

Agora o processo desenrola-se da mesma forma, já que obtendo g através de (5.31) podemos identificar a onda incidente $v^{inc} = \mathcal{A}g$, e assim definir a fronteira onde irá coincidir com a onda difractada $u^{sc} = \Phi(\cdot - y)$,

$$\partial D = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus G : (\Phi(x - y) + \mathcal{A}g)(x) = 0\}. \quad (5.33)$$

Observação 5.14. As mesmas observações acerca da regularização necessária para resolver (5.31), ou do uso de uma parametrização para obter ∂D são aplicáveis neste caso. Notamos que aqui é exigido um conhecimento da amplitude limite para múltiplas direcções incidentes.

Por outro lado, também aqui, ao exigirmos $y \in D$, estamos a supor que conhecemos pelo menos o obstáculo ao ponto de ser possível considerar um ponto no seu interior.

5.4.3 Método de Colton-Kirsch

O método de Colton-Kirsch é mais conhecido pelo nome *amostragem linear* (linear sampling), e é muito semelhante ao método de Colton-Monk, porém a ideia não reside em procurar a fronteira pela igualdade entre a onda incidente e a onda difractada.

Aqui a ideia é definir o domínio D sabendo que $\Phi(x - y)$ só será uma onda difractada se $y \in D$.

Por isso, a resolução da equação (5.31), com

$$(\mathcal{A}_\infty g)(\theta) = \frac{1}{4\pi} e^{-i\omega\theta \cdot y} \quad (5.34)$$

deixa de ser possível quando $y \notin D$ (ou $y \in \Omega$). A razão é que $\Phi(x - y)$ tem uma singularidade em Ω e não pode ser assim uma onda difractada por D , qualquer que seja a distribuição g feita para a onda incidente de Herglotz.

Portanto o método de amostragem linear identifica D pela possibilidade de resolver a equação, ou seja

$$D = \{y \in \mathbb{R}^N : (\mathcal{A}_\infty g)(\theta) = \frac{1}{4\pi} e^{-i\omega\theta \cdot y} \text{ tem solução}\}. \quad (5.35)$$

Este método tornou-se bastante popular, mas exige o conhecimento completo de todas as amplitudes limites para todas as direcções de incidência.

O método conheceu ainda algumas variantes, nomeadamente o chamado *método de factorização* (de Kirsch).

5.5 Aproximação da Óptica Geométrica

Quando trabalhamos com frequências altas as regras de reflexão aplicam-se com uma boa aproximação, prescindindo da resolução exacta com as equações de Helmholtz, essa é a chamada aproximação de Kirchhoff, que leva à identidade de Bojarski, usada para a reconstrução em alta frequência, por exemplo através de aparelhos de ecografia.

Observação 5.15. (Reflexão Geométrica). Dada uma direcção incidente d , que reflecte num plano com vector normal ν , podemos escrevê-la como

$$d = (d \cdot \nu)\nu + (d \cdot \tau)\tau$$

onde τ é uma tangente unitária do plano. A reflexão perfeita ocorre quando opomos o sinal da direcção em ν ,

$$r = -(d \cdot \nu)\nu + (d \cdot \tau)\tau.$$

Por isso, subtraindo as expressões obtemos a direcção de reflexão

$$r = d - 2(d \cdot \nu)\nu. \quad (5.36)$$

5.5.1 Aproximação de Kirchhoff

Usando a reflexão geométrica temos

$$u^{tot}(x) = u^{inc}(x) + u^{sc}(x) = e^{i\omega d \cdot x} - e^{i\omega r \cdot x} \quad (5.37)$$

notando que se $x = 0\nu + (x \cdot \tau)\tau$, ou seja, localizado no plano difractor, obtemos

$$u^{tot}(x) = 0,$$

pois aí $d \cdot x = r \cdot x = (d \cdot \tau)(x \cdot \tau)$. No mesmo plano difractor, a derivada normal é dada por

$$\begin{aligned} \partial_\nu u^{tot}(x) &= \nu \cdot \nabla u^{tot}(x) = \nu \cdot (de^{i\omega d \cdot x} - re^{i\omega r \cdot x})i\omega \\ &= i\omega((\nu \cdot d)u^{inc}(x) + (\nu \cdot r)u^{sc}(x)) \\ &= 2i\omega(\nu \cdot d)u^{inc}(x) = 2\partial_\nu u^{inc}(x) \end{aligned}$$

porque $u^{sc} = -u^{inc}$ e $(\nu \cdot r) = -(\nu \cdot d)$.

Assim, na aproximação de Kirchhoff, dada uma direcção d , vamos distinguir a *fronteira iluminada* de um convexo D , definida por

$$\partial D_- = \{x \in \partial D : \nu(x) \cdot d < 0\} \quad (5.38)$$

onde impomos $\partial_\nu u^{tot} = 2\partial_\nu u^{inc}$, (neste caso $\partial_\nu u^{sc} = \partial_\nu u^{inc}$) da *fronteira na sombra*

$$\partial D_+ = \{x \in \partial D : \nu(x) \cdot d > 0\} \quad (5.39)$$

onde impomos $\partial_\nu u^{tot} = 0$ (neste caso $\partial_\nu u^{sc} = -\partial_\nu u^{inc}$).

Pela representação em potencial de camada simples

$$u^{sc}(x) = \int_{\partial D} \Phi(x-y)\psi(y)ds_y$$

Vamos ver um resultado respeitante a uma solução global, assumindo que u^{inc} verifica a equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N

Teorema 5.16. *Se u^{inc} verifica a equação de Helmholtz em \mathbb{R}^N temos*

$$u^{sc}(x) = - \int_{\partial D} \Phi(x-y)\partial_\nu u^{tot}(y)ds_y. \quad (5.40)$$

Demonstração. (e.g. [4]) A densidade ψ é o salto da derivada normal,

$$\psi = [\partial_\nu u] = \partial_\nu u^{int} - \partial_\nu u^{sc}$$

□

Portanto, pela aproximação geométrica como $\partial_\nu u^{tot} = 0$ em ∂D_+ obtemos

$$u^{sc}(x) = -2 \int_{\partial D_-} \Phi(x-y) \partial_\nu u^{inc}(y) ds_y \quad (5.41)$$

e neste caso

$$\begin{aligned} u_\infty^{sc}(\theta) &= -\frac{2}{4\pi} \int_{\partial D_-} e^{-i\omega\theta \cdot y} \partial_\nu u^{inc}(y) ds_y \\ &= -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{\partial D_-} e^{-i\omega\theta \cdot y} (\nu(y) \cdot d) e^{i\omega d \cdot y} ds_y \\ &= -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{\partial D_-} e^{i\omega(d-\theta) \cdot y} (\nu(y) \cdot d) ds_y \end{aligned} \quad (5.42)$$

5.5.2 Identidade de Bojarski

Pela fórmula de Kirchhoff (5.42), escolhendo $\theta = -d$, o que corresponde a medir na direcção oposta à incidência (*backscattering*)

$$u_\infty^{sc}(d, -d) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{\partial D_-} e^{2i\omega d \cdot y} (\nu(y) \cdot d) ds_y \quad (5.43)$$

e de forma análoga

$$u_\infty^{sc}(-d, d) = \frac{i\omega}{2\pi} \int_{\partial D_+} e^{-2i\omega d \cdot y} (\nu(y) \cdot d) ds_y \quad (5.44)$$

Assim somando os valores (com conjugação do segundo) obtemos

$$u_\infty^{sc}(d, -d) + \overline{u_\infty^{sc}(-d, d)} = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{\partial D} e^{2i\omega d \cdot y} (\nu(y) \cdot d) ds_y \quad (5.45)$$

podendo concluir-se um resultado de identificação.

Teorema 5.17. (*Identidade de Bojarski*) *Assumindo a aproximação geométrica para altas frequências, temos*

$$\mathcal{F}(\chi_D)(-2\omega d) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_D(y) e^{2i\omega d \cdot y} dy = \frac{\pi}{\omega^2} \left(u_\infty^{sc}(d, -d) + \overline{u_\infty^{sc}(-d, d)} \right)$$

Demonstração. Notando que a derivada normal verifica

$$\partial_\nu(e^{2i\omega d \cdot y}) = 2i\omega(d \cdot \nu)e^{2i\omega d \cdot y}$$

de (5.45) obtemos

$$u_\infty^{sc}(d, -d) + \overline{u_\infty^{sc}(-d, d)} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \partial_\nu(e^{2i\omega d \cdot y}) ds_y = -\frac{1}{4\pi} \int_D \Delta(e^{2i\omega d \cdot y}) dy,$$

onde a última igualdade resulta do Teorema da Divergência, e como

$$\Delta(e^{2i\omega d \cdot y}) = -4\omega^2 e^{2i\omega d \cdot y}$$

resulta então

$$u_\infty^{sc}(d, -d) + \overline{u_\infty^{sc}(-d, d)} = \frac{\omega^2}{\pi} \int_D e^{2i\omega d \cdot y} dy$$

concluindo-se o resultado. □

Observação 5.18. Esta identidade permite, por inversão aproximada da transformada de Fourier, recuperar a função característica χ_D . Note-se que tal só exequível quando dispomos de um conhecimento razoável dos valores $\xi = -2\omega d$, que é a variável de Fourier conhecida para ω grande.

Ainda que tenhamos $d \in \partial B(0, 1)$, isto basicamente significa o conhecimento possível apenas em

$$\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial B(0, 2\omega_0)$$

assumindo que para valores de $\omega < \omega_0$ a aproximação de alta frequência deixa de fazer sentido.

De qualquer forma, esta é uma aproximação em alta frequência que permite uma fórmula usada em *backscattering* (com aplicação em aparelhos de ecografia).

6 Anexos

6.1 Método de Newton-Kantorovich

6.1.1 Derivação de Fréchet

Definição 6.1. Sejam E, F espaços normados e A um operador $A : X \subseteq E \rightarrow F$, cujo domínio X é um aberto. Dizemos que A é *Fréchet-diferenciável* (ou *F-diferenciável*) no ponto $x \in X$, se existir um operador linear $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que:

$$\|A(x+h) - Ax - Th\|_F = o(\|h\|_E) \quad \text{quando } \|h\|_E \rightarrow 0 \quad (6.1)$$

Caso o operador T exista, é chamado *derivada de Fréchet em x* , e escrevemos A'_x , tendo-se

$$\begin{aligned} A' : X &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\longmapsto A'_x : E \rightarrow F \quad (\text{operador linear}) \end{aligned}$$

Se A for F-diferenciável em todos os pontos $x \in X$ diremos que A é F-diferenciável em X .

Teorema 6.2. *Sejam E, F espaços de Banach e seja A um operador Fréchet-diferenciável num convexo X*

$$A : X \subseteq E \rightarrow F$$

Se tivermos

$$\|A'_x\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq L < 1, \quad \forall x \in X$$

então

$$\|Ax - Ay\|_F \leq L\|x - y\|_E, \quad \forall x, y \in X.$$

Observação 6.3. A definição de derivada de Fréchet permite o desenvolvimento de Taylor de primeira ordem

$$A(x+h) = Ax + A'_x h + o(\|h\|),$$

sendo ainda possível um desenvolvimento de segunda ordem,

$$A(x+h) = Ax + A'_x h + \frac{1}{2}A''_x(h, h) + o(\|h\|^2),$$

em que A''_x é uma função bilinear contínua¹ correspondente à segunda derivada (no caso de \mathbb{R}^N corresponde a considerar as matrizes hessianas).

6.1.2 Método de Newton-Kantorovich

No caso dos espaços de Banach, fazemos aparecer de forma semelhante o método de Newton, exigindo que o operador seja F-diferenciável, e que a derivada de Fréchet seja invertível numa vizinhança da solução. Nessas condições, podemos estabelecer a equivalência:

$$Ax = 0 \Leftrightarrow (A'_x)^{-1}(Ax) = 0,$$

porque o inverso do operador linear contínuo A'_x será um operador linear contínuo, e portanto só será nulo quando o seu argumento for nulo (neste caso o argumento é Ax). Assim, $Ax = 0$ é equivalente a

$$x = x - (A'_x)^{-1}(Ax)$$

e, dado x_0 , obtemos o método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - (A'_{x_n})^{-1}(Ax_n), \quad (6.2)$$

que nesta generalização também é designado como **método de Newton-Kantorovich**.

Observação 6.4. O método de Newton-Kantorovich usa a propriedade dos métodos do ponto fixo

$$x_{n+1} = Ax_n$$

que têm convergência supralinear quando $A'_z = 0$, onde z é o ponto fixo de A , ou seja $z = Az$.

Com efeito,

$$x_{n+1} - z = Ax_n - Az = A'_z(x_n - z) + \frac{1}{2}A''_z(x_n - z, x_n - z) + o(\|x_n - z\|^2),$$

¹A norma $\|A''_x\|$ é a norma das aplicações bilineares contínuas, definida por

$$\|B\| = \sup_{v,w \neq 0} \frac{\|B(v,w)\|}{\|v\| \|w\|}.$$

e portanto, como supomos $A'_z = 0$,

$$\|e_{n+1} + \frac{1}{2}A''_z(e_n, e_n)\| = o(\|e_n\|^2) \Leftrightarrow \left\| \frac{e_{n+1}}{\|e_n\|^2} + \frac{1}{2}A''_z\left(\frac{e_n}{\|e_n\|}, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right) \right\| = \varepsilon_n = o(1),$$

o que significa que

$$\frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^2} \leq \frac{1}{2}\|A''_z\| + \varepsilon_n \leq K,$$

ou seja, a convergência é pelo menos quadrática e temos $\tilde{K}_\infty \leq \frac{1}{2}\|A''_z\|$.

6.2 Métodos de Optimizaçãõ

Revemos alguns conceitos de optimizaçãõ que se revelam úteis no tratamento de problemas inversos.

6.2.1 Método dos Míminos Quadrados no quadro funcional

Seja $A : X \rightarrow Y$ um operador linear compacto injectivo.

Consideramos uma aproximaçãõ de $Af = g$ procurando um f_a que minimize a norma

$$\|Af_a - g\|^2 = \langle Af_a - g, Af_a - g \rangle$$

num espaço de dimensãõ finita, ou seja limitamos a procura de f_a num subespaço linear de dimensãõ finita,

$$f_a = \sum_{n=1}^m a_n e_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}$$

usando um conjunto de funções e_1, \dots, e_n em que as imagens $\phi_k = Ae_k$ sãõ linearmente independentes.

(Há aqui alguma semelhança com o conceito de quasi-soluçãõ, no sentido em que se restringem as possibilidades de f . No entanto, nãõ se usa uma limitaçãõ da norma, mas sim um subespaço de dimensãõ finita.)

Querendo minimizar o funcional quadrático

$$Q(\mathbf{a}) = Q(a_1, \dots, a_n) = \langle Af_a - g, Af_a - g \rangle = \langle Af_a, Af_a \rangle - 2 \langle Af_a, g \rangle + \langle g, g \rangle$$

reparamos que de

$$\partial_{\mathbf{a}} Q = \langle \partial_{\mathbf{a}}(Af_a), Af_a \rangle + \langle \partial_{\mathbf{a}}(Af_a), Af_a \rangle - 2 \langle \partial_{\mathbf{a}}(Af_a), g \rangle$$

a solução de $\partial_{\mathbf{a}}Q = \mathbf{0}$ é obtida com

$$\langle \partial_{\mathbf{a}}(Af_a), Af_a \rangle = \langle \partial_{\mathbf{a}}(Af_a), g \rangle$$

Como $Af_a = A(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{a} \cdot A\mathbf{e}$, temos $\partial_{\mathbf{a}}(Af_a) = A\mathbf{e}$

$$\langle A\mathbf{e}, A\mathbf{e} \rangle \mathbf{a} = \langle A\mathbf{e}, g \rangle$$

ou ainda em termos de componentes, obtemos o sistema normal

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle a_j = \langle \phi_i, g \rangle, \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

em que $\phi_k = Ae_k$.

6.2.2 Método do Gradiente

Numa outra perspectiva, a resolução de $Af = g$, para um operador linear auto-adjunto está relacionada com a minimização do funcional

$$Q(\phi) = \frac{1}{2} \langle A\phi, \phi \rangle - \langle g, \phi \rangle + c$$

pois $\partial_{\phi}Q(h) = \langle \frac{1}{2}(A + A^*)\phi - g, h \rangle$ e a resolução de $\partial_{\phi}Q = 0$ equivale então a $\frac{1}{2}(A + A^*)\phi = g$.

De facto, pela definição de derivada de Fréchet, $\partial_{\phi}Q$ é o funcional linear obtido pela diferença

$$Q(\phi + h) - Q(\phi) = \partial_{\phi}Q(h) + o(\|h\|)$$

em que o termo $o(\|h\|)/\|h\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Calculando

$$\begin{aligned} Q(\phi + h) - Q(\phi) &= \frac{1}{2} \langle A(\phi + h), \phi + h \rangle - \langle g, \phi + h \rangle - \frac{1}{2} \langle A\phi, \phi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle A(\phi + h) - A\phi, \phi \rangle - \langle g, h \rangle + \frac{1}{2} \langle A(\phi + h), h \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \partial_{\phi}A(h) + o(\|h\|), \phi \rangle - \langle g, h \rangle + \frac{1}{2} \langle A\phi + \partial_{\phi}A(h) + o(\|h\|), h \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle h, (\partial_{\phi}A)^*(\phi) \rangle + \frac{1}{2} \langle A\phi - g, h \rangle + o(\|h\|) \end{aligned}$$

6.2.3 Método de Gauss-Newton (mínimos quadrados não lineares)

Um caso conhecido é o problema de mínimos quadrados com uma função não linear

$$F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

e onde o objectivo é minimizar

$$f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2 = \frac{1}{2} \langle F(x), F(x) \rangle$$

Exemplo 6.5. Aproximar $g(t)$ com funções da forma $x_1 e^{x_2 t}$, ou seja temos que minimizar

$$F(x_1, x_2)(t_k) = x_1 e^{x_2 t_k} - g(t_k)$$

para pontos t_1, \dots, t_M , no caso da norma ℓ^2 discreta

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^M (x_1 e^{x_2 t_k} - g(t_k))^2.$$

Como a dependência nos coeficientes x_1, x_2 deixou de ser linear, o procedimento dos mínimos quadrados habituais deixa de ser possível.

- O processo geral é ainda usar a derivada de Fréchet e obtemos

$$f'_x(h) = \langle F'_x(h), F(x) \rangle$$

porque

$$\begin{aligned} \langle F(x+h), F(x+h) \rangle - \langle F(x), F(x) \rangle &= \langle F(x+h) - F(x), F(x+h) + F(x) \rangle \\ &= \langle F'_x(h) + o(\|h\|), F'_x(h) + o(\|h\|) + 2F(x) \rangle \\ &= 2 \langle F'_x(h), F(x) \rangle + o(\|h\|) \end{aligned}$$

notando que $\langle F'_x(h), F'_x(h) \rangle = \|F'_x(h)\|^2 \leq (\|F'_x\|_{\mathcal{L}(H)} \|h\|)^2 = O(\|h\|^2) = o(\|h\|)$.

- No caso em que $H = \mathbb{R}^N$ e em que $F(x) \in \mathbb{R}^M$, temos

$$0 = f'_x(h) = \langle F'_x(h), F(x) \rangle = (\nabla F(x)h) \cdot F(x),$$

e usando a base canônica com $h = \mathbf{e}_k$, obtemos

$$\nabla F(x)^\top F(x) = 0.$$

Ou seja

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(t_1) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_1}(t_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_N}(t_1) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_N}(t_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(t_1) \\ \vdots \\ F(t_M) \end{bmatrix} = 0$$

Exemplo 6.6. No exemplo considerado antes, com $F(x_1, x_2)(t) = x_1 e^{x_2 t} - g(t)$, obtemos

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} e^{x_2 t_1} & x_1 t_1 e^{x_2 t_1} \\ \vdots & \vdots \\ e^{x_2 t_M} & x_1 t_M e^{x_2 t_M} \end{bmatrix}, \quad -F(x) = \begin{bmatrix} g(t_1) - x_1 e^{x_2 t_1} \\ \vdots \\ g(t_M) - x_1 e^{x_2 t_M} \end{bmatrix}$$

$$0 = f'_x = \nabla F(x)^\top F(x)$$

ficando

$$\nabla F(x)^\top F(x) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M (g(t_k) - x_1 e^{x_2 t_k}) e^{x_2 t_k} \\ \sum_{k=1}^M (g(t_k) - x_1 e^{x_2 t_k}) x_1 t_k e^{x_2 t_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Aplicando o Método de Newton à função $\Phi(x) = \nabla F(x)^\top F(x)$, temos

$$\nabla \Phi(x) = \nabla(\nabla F(x)^\top F(x)) = \nabla^2 F(x) : F(x) + \nabla F(x)^\top \nabla F(x).$$

O **Método de Gauss-Newton** consiste em ignorar a parte das 2ª derivadas, $\nabla^2 F(x) : F(x)$, e trabalhar apenas com

$$\nabla \Phi(x) \approx \nabla F(x)^\top \nabla F(x)$$

na resolução do sistema linear de Newton $\nabla \Phi(x^{(k)}) \mathbf{h} = -\Phi(x^{(k)})$, ficando assim

$$[\text{Método de Gauss-Newton}] \quad J^\top J \mathbf{h} = -J^\top \mathbf{f} \quad (6.3)$$

onde $J = \nabla F(x^{(k)})$, $\mathbf{f} = F(x^{(k)})$.

Esta atribuição do valor de \mathbf{h} pode ser tanto encarada como a escolha directa para $x^{(k+1)}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \mathbf{h},$$

como também uma direcção de descida, e nesse caso $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega\mathbf{h}$, onde ω é determinado pelos métodos de pesquisa linear.

Observação 6.7. Pelo método de Gauss-Newton

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \mathbf{h} = -(J^\top J)^{-1} J^\top \mathbf{f}$$

e portanto pode ser visto como uma aplicação do método do ponto fixo usando

$$\begin{aligned} x &= G(x) = x - (J^\top J)^{-1} J^\top \mathbf{f} \\ &= x - (\nabla F(x)^\top \nabla F(x))^{-1} \nabla F(x)^\top F(x) \end{aligned}$$

Observação 6.8. Uma forma mais conhecida de aplicação do Método de Levenberg-Marquardt é aplicada ao Método de Gauss-Newton

$$(J^\top J + \varepsilon I) \mathbf{h} = -J^\top \mathbf{f}$$

sendo também habitual substituir I pela diagonal da matriz $J^\top J$.

Referências

- [1] C. J. S. Alves: *Análise Numérica de Equações Diferenciais Parciais*. Monografia. I. S. T. (2008).
- [2] K. Atkinson, W. Han. *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. Springer-Verlag 2001
- [3] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, Paris, 1982
- [4] D. Colton, R. Kress: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory* (2nd Ed.). Appl. Math. Sciences, 93. Springer (1998)
- [5] L. Evans: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [6] P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright. *Practical optimization*. Academic Press, London-New York 1981
- [7] V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential equations*. Springer-Verlag 1998
- [8] A. Kirsch. *An introduction to the Mathematical theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag 1996
- [9] R. Kress. *Linear integral equations*. App. Math. Sci. 82, Springer-Verlag 1999
- [10] E. Kreyzig: *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons (2005)
- [11] A. K. Louis: Optimal reconstruction kernels in medical imaging. in *Optimization in Medicine* (Ed: C. J. S. Alves, P. M. Pardalos, L. N. Vicente). Springer in *Optimization and its Applications Series*, 12. Springer-Verlag (2008).
- [12] J. Nocedal, S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag 1999
- [13] R. Potthast. *Point-sources and Multipoles in Inverse Scattering*. Chapman & Hall 2001

- [14] O. Scherzer (editor). *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*. Springer-Verlag (2011)
- [15] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis (Applications to Mathematical Physics)*. Applied Mathematical Sciences Vol. 109, Springer (1995)