# 2º Exame (1ºTeste) de Análise Numérica (LMAC, MEIC, MMA)

Instituto Superior Técnico, 27 de Janeiro de 2015, 15h00-16h15-17h30

**1.1)**$_{[4.0]}$Pretende-se $f(x) = p_n(x)/x$ (onde $p_n$ é um polinómio) que verifique a interpolação

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 2,\ f(2) = 0.$$

a) Determine $p_n$ com o menor grau.

b) Sendo $F(x) = g(x)/x$, que verifica a interpolação (tal como $f$), majore o erro

$$E_F = \max_{x\in[1,2]} |F(x) - f(x)| \quad \text{em função de } M_k = ||g^{(k)}||_\infty.$$

**1.2)**$_{[1.5]}$ Calcule um interpolador trigonométrico $\phi$ que verifique

$$\phi(0) = 1, \phi(\frac{\pi}{2}) = 0, \phi(\pi) = -1, \phi(\frac{3\pi}{2}) = 1.$$

**1.3)**$_{[1.5]}$ Seja $R_0 = 0$. Explicite $R_N$ em função de $N$, sabendo que $R_{k+1} + 3k^2 = k^3 + R_k + 2k$.

**1.4)**$_{[3.0]}$

a) Determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, na aproximação $Q_z(f) = \alpha f(z - 2h) + \beta f(z + 2h)$ do funcional

$$A_z(f) = f'(z) + f(z),$$

e apresente o erro da aproximação, assumindo $f \in C^4[z - 2h, z + 2h]$.

b) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ que minimizam

$$d(a, b) = \int_{-1}^{1} x^2(a + bx - x^3 - x)^2 dx.$$

**Auxiliar.**

$$E(x) = \frac{f^{(|\alpha|+m+1)}(\xi_x)}{(|\alpha|+m+1)!} \prod_{k=0}^{m}(x - x_k)^{\alpha_k+1}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i \frac{1}{N}} & \cdots & e^{2\pi i \frac{(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{2\pi i \frac{(N-1)}{N}} & \cdots & e^{2\pi i \frac{(N-1)^2}{N}} \end{bmatrix}$$

**2º Exame (2º Teste) de Análise Numérica** (LMAC, MEIC, MMA)
Instituto Superior Técnico, 27 de Janeiro de 2015, 15h00-16h15-17h30

**2.1)**$_{[3.0]}$ Determine

$$D_A = \min_{a,b\in\mathbb{R}} \max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{(a+bx)+(a+bx-1)x^2 - Ax^4}{x^2+1} \right|$$

a) quando $A=0$, b) quando $A=1$.

**2.2)**$_{[2.0]}$ Considere a matriz companheira $C$ associada ao polinómio

$$p(x) = x^4 - 6x^3 - x - 1.$$

a) Localize os valores próprios de $C$ e estabeleça a relação com as raízes de $p$.
b) Aplique 3 iterações do método das potências a $C$ para aproximar a raiz dominante de $p$.

**2.3)**$_{[3.5]}$ Seja $h>0$ e seja $y'(t) = f(t, y(t))$, com $y(0) = y_0$.
a) Admitindo inicialização apropriada, determine $\beta_{-3}, \beta_{-1}, \beta_1 \in \mathbb{R}$, para a maior ordem de convergência dos métodos

$$y_{k+1} = y_{k-3} + h(\beta_{-3} f_{k-3} + \beta_{-1} f_{k-1} + \beta_1 f_{k+1}).$$

b) Defina a região de A-estabilidade do método anterior, convergente, com $\beta_{-3} = \beta_1 = 0$.

**2.4)**$_{[1.5]}$ Considere o problema $\begin{cases} u''(t) = (1+t^2)u(t) & \text{quando } t\in[0,4] \\ u(0)=0,\ u(4)=4, \end{cases}$

Estabeleça o sistema linear a resolver pelo método das diferenças finitas com uma aproximação de segunda ordem usando $h=1$.

**Auxiliar.**

$$\bar{B}(a_{kk}, r_k), \ \textbf{com } r_k = \sum_{j\neq k} |a_{kj}|$$

$$\sum_{m=-1}^{p-1} \alpha_{-m} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{m=-1}^{p-1} \alpha_{-m} m^s = s \sum_{m=-1}^{p-1} \beta_{-m} m^{s-1} \ \textbf{(para } s = 1, \ldots, r\textbf{)},$$

$\chi$-Resolução:

**1.1. a)** Temos $xf(x) = p_n(x) \implies p_n(1) = 2, p_n(2) = 0.$
Depois $(xf(x))' = f(x) + xf'(x) = p_n'(x) \implies p_n'(1) = f(1) + 1f'(1) = 4$
e finalmente $(xf(x))'' = 2f'(x) + xf''(x) = p_n''(x) \implies p_n''(1) = 2f'(1) + 1f''(1) = 6$
Construímos a tabela de diferenças generalizadas para a interpolação de Hermite para $p_3$ (há 4 equações)

| $x$ | : | 1 | | 1 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | : | 2 | | 2 | | 2 | | 0 |
| | | | $p[1,1]=4$ | | 4 | | $\frac{0-2}{2-1}=-2$ | |
| | | | | $p[1,1,1]=\frac{6}{2}=3$ | | $\frac{-2-4}{2-1}=-6$ | | |
| | | | | | $-9$ | | | |

Conclui-se assim que $p_3(x) = 2 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 - 9(x-1)^3$.

**1.1. b)** Tal como em a), $g$ toma os mesmos valores de $p_n$ pelo que essa interpolação dá

$$||g - p_3||_\infty \leq \frac{||g^{(4)}||_\infty}{4!} \max_{[1,2]} |\underbrace{(x-1)^3(x-2)}_{w(x)}| \leq \frac{M_4}{24}\frac{3^3}{4^4}$$

porque $w(x) = (x-1)^3(x-2) \implies w'(x) = (x-1)^2(4x-7) = 0 \implies x = 1 \vee x = \frac{7}{4} \implies w(\frac{7}{4}) = \frac{3^3}{4^4}$, Portanto

$$||F - f||_\infty = ||\frac{g(\eta) - p(\eta)}{\eta}||_\infty \leq \overbrace{\frac{1}{\min|x|}}^{=1} ||g - p_3||_\infty \leq \frac{3^3 M_4}{3 \times 2^{11}}.$$

**1.2)** Ver exercício - Texto de Apoio.

**1.3)** Notamos que $R_{k+1} - R_k = k^3 - 3k^2 + 2k = k(k-1)(k-2) = k^{[3]}$ e isto implica

$$R_N = R_N - R_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta R_k = \sum_{k=0}^{N-1} k^{[3]} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{N-1} \Delta k^{[4]} = \frac{1}{4}N^{[4]} = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4}.$$

**1.4)** a) Como $Q_z(f) = \alpha f(x-2h) + \beta f(x+2h)$ temos

$$Q_z(1) = A_z(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1, \quad Q_z(\eta) = A_z(\eta) \Leftrightarrow \alpha(z-2h) + \beta(z+2h) = 1 + z,$$

obtemos $(\alpha+\beta)z + (\beta-\alpha)2h = z + 1$, ou seja $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{4h},\ \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{4h}$. Agora o erro é

$$E_z = A_z(f) - Q_z(f) = A_z(e_1)$$

onde $e_1(x) = f[z-2h, z+2h, x](x-z+2h)(x-z-2h)$ é o erro de interpolação. Portanto

$$\begin{aligned} E_z = A_z(e_1) &= e_1'(z) + e_1(z) = f[z-2h, z+2h, z, z](2h)(-2h) \\ &\quad + f[z-2h, z+2h, z]2(z-z-0) + f[z-2h, z+2h, z](+2h)(-2h) \\ &= -2h^2\left(\frac{1}{3}f^{(3)}(\xi_1) + f^{(2)}(\xi_2)\right) \quad (\xi_1, \xi_2 \in [z-2h, z+2h] \end{aligned}$$

b) Temos a aproximação de $x^3$ por polinómio $a + (b-1)x = a + \beta x$ usando o produto interno com $w(t) = t^2$.

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle_w & \langle 1,t\rangle_w \\ \langle 1,t\rangle_w & \langle t,t\rangle_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3} & \langle 1,t\rangle_w = 0 \\ \langle 1,t\rangle_w = 0 & \int_{-1}^1 t^2 t^2 dt = \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \langle t^3,1\rangle_w = \int_{-1}^1 t^2 t^3 dt = 0 \\ \langle t^3,t\rangle_w = \int_{-1}^1 t^2 t t^3 dt = \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

concluindo-se que $a=0,\ \beta=\frac{5}{7}$ ou seja $b=\frac{12}{7}$.

**2.1.a).** Simplificamos

$$\left|\frac{(a+bx)+(a+bx-1)x^2-Ax^4}{x^2+1}\right|=\left|a+bx-x^2\frac{Ax^2+1}{x^2+1}\right|$$

Se $A=0$ temos $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$. Usando o Algoritmo de Remes com $X^{(0)}=\{-1,0,1\}$,

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\implies\begin{bmatrix}a\\b\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\0\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

sendo $r(x)=\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1}{4}$, vemos os pontos críticos quando $r'(x)=f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0$, ou seja, $x=0$.

Vemos que $||r||_\infty=\frac{1}{4}=|d|$, pelo que de novo $X^{(1)}=\{-1,0,1\}$, e o algoritmo termina.

Portanto, pelo T. Chebyshev obtemos $p(x)=\frac{1}{4}\in\mathcal{P}_1$ como melhor aproximação uniforme e $D_0=|d|=\frac{1}{4}$.

**2.1.b)** Com $A=1$ trata-se de minimizar $|a+bx-x^2|$ o que resulta em $[-1,1]$ da minimização dada pelo polinómio de Chebyshev $\tilde{T}_2(x)=x^2-\frac{1}{2}$.

Isso implica $a=\frac{1}{2}, b=0$, e $D_1=\frac{1}{2^{2-1}}=\frac{1}{2}$.

**2.2.a)** As raízes de $p$ são os valores próprios da matriz companheira

$$C=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&6\end{bmatrix}$$

Por linhas $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\bar{B}(0,1)$. Ainda $\lambda_1\in\bar{B}(6,2)$ e não intersectando $\bar{B}(0,1)$ é único, e é real porque a matriz é real.

Por colunas, concluímos ainda que $\lambda_1\in\bar{B}(6,1)$ e portanto $\lambda_1\in[5,7]$.

**2.2.b)** É apropriado começar com $v^{(0)}=(0,0,0,1)$ (coluna do dominante), e obtemos de $v^{(k+1)}=Av^{(k)}$ que

$$v^{(1)}=Av^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\6\end{bmatrix},v^{(2)}=Av^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\1\\6\\36\end{bmatrix},v^{(3)}=Av^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\6\\36\\217\end{bmatrix},u^{(3)}=+\frac{v^{(3)}}{||v^{(3)}||_\infty}$$

logo $u^{(3)}=(\frac{1}{217},\frac{6}{217},\frac{36}{217},1)$ e $\lambda^{(3)}=[Au^{(3)}]_4=6+\frac{7}{217}=6.03226..$ (próximo de $\lambda_1=6.03204..$)

**2.3. a)** O método envolve apenas $y_{k+j},\ f_{k+m}$, e podemos usar o critério dos coeficientes. Primeiro confirma-se

$$0=\sum_{m=-1}^{3-1}\alpha_{-m}=\alpha_1+...+\alpha_{-3}=-1+0+0+0+1=0$$

Neste caso há estabilidade porque a equação característica associada à equação às diferenças $y_{k+1}=y_{k-3}$ é simplesmente $r^4-1=0$, que tem raizes reais simples $r=\pm1$ (e duas complexas $r=\pm i$), em qualquer caso $|r|^4=1,|r|=1$. A parte restante do critério dos coeficientes permite obter

$$\sum_{m=-1}^{4-1}\alpha_{-m}m^s=-1(-1)^s+0+3^s=s\sum_{m=-1}^{4-1}\beta_{-m}m^{s-1}=s(\beta_1(-1)^{s-1}+\beta_{-1}(1)^{s-1}+\beta_{-3}(3)^{s-1}).$$

Com $s=1$, resulta $1+3=1(\beta_1+\beta_{-1}+\beta_{-3}) \Leftrightarrow 4=\beta_1+\beta_{-1}+\beta_{-3}$.
Com $s=2$, obtemos $-1+9=2(-\beta_1+\beta_{-1}+3\beta_{-3}) \Leftrightarrow 4=-\beta_1+\beta_{-1}+3\beta_{-3}$
Com $s=3$, obtemos $1+27=3(\beta_1+\beta_{-1}+9\beta_{-3}) \Leftrightarrow 9+\frac{1}{3}=\beta_1+\beta_{-1}+9\beta_{-3}$
Assim $8\beta_{-3}=5+\frac{1}{3} \implies \beta_{-3}=\frac{2}{3}$, e $2\beta_1-2\beta_3=0 \implies \beta_1=\frac{2}{3}, \beta_{-1}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$,
Concluímos que

$$y_{k+1}=y_{k-3}+\frac{2}{3}h(f_{k-3}+4f_{k-1}+f_{k+1})$$

é estável e tem ordem de consistência 3, e assim ordem de convergência 3.

**2.3. b)**

Vemos de a) que para ser convergente $4=\beta_1+\beta_{-1}+\beta_{-3}$ implica $\beta_{-1}=4$. Portanto temos o método

$$y_{k+1}=y_{k-3}+4hf_{k-1}$$

com região de estabilidade definida pela equação às diferenças $y_{k+1}=y_{k-3}+4\alpha y_{k-1}$.

A equação característica é $r^4-4\alpha r^2-1=0$, donde resulta $r^2=\frac{1}{2}(4\alpha \pm \sqrt{16\alpha^2+4})$, e $|r|\leq 1$ implica

$$\mathcal{A}_M=\left\{\alpha \in \mathbb{C} : \left|2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2+1}\right| \leq 1\right\}.$$

**2.4.** Obtemos da aproximação de 2ª ordem $u''(t_k)=\frac{u_{k-1}-2u_k+u_{k+1}}{h^2}+O(h^2)$,

$$\frac{u_{k-1}-2u_k+u_{k+1}}{h^2}-(1+t_k^2)u_k=0$$

com $h=1$ retiramos $u_{k-1}+u_{k+1}-(3+t_k^2)u_k=0$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_0 \\ 0 \\ -u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$