Exame (1º Teste) de Análise Numérica (LMAC, MEIC, MMA)
Instituto Superior Técnico, 12 de Janeiro de 2015, 15h00-16h15 (1º Teste)

1.1)$_{[3.0]}$ a) Determine o polinómio de menor grau tal que

$$p(0) = p'(0) = p(1) = p'(1) = p''(1) = 1.$$

b) Sabendo que $p(x) - e^x$ interpola uma função $f \in C^\infty[0,1]$, tal que $||f^{(n)}||_\infty \le 60$, majore o erro absoluto entre $p(x)$ e $f(x) + e^x$ no intervalo $[-1,1]$.

1.2)$_{[1.5]}$ Sabe-se que um spline cúbico verifica $s(x) = x^3 + 1$ quando $x \in [0,1]$. Determine a expressão geral desse spline cúbico natural em $[-1,1]$ sabendo que $s(-1) = 3$.

1.3)$_{[1.5]}$ Determine a expressão simplificada de $\sum_{k=1}^{n-1}(k^2C^k - kC^k)$.

1.4)$_{[4.0]}$

a) Usando uma aproximação $Q(f) = \alpha\delta_x f + \beta\delta_y f$ do funcional $A(f) = \delta_z f$ mostre que para $z \in [x,y]$, $f \in C^2[x,y]$, temos

$$f(z) = (1-\theta)f(x) + \theta f(y) - \frac{1}{2}f''(\xi)\theta(1-\theta)(x-y)^2 \quad (\xi \in [x;y]).$$

b) Determine uma fórmula de integração de Gauss com dois nós e com grau 3 para aproximar

$$I(f) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx.$$

Auxiliar.

$$E(x) = \frac{f^{(|\alpha|+m+1)}(\xi_x)}{(|\alpha|+m+1)!}\prod_{k=0}^{m}(x-x_k)^{\alpha_k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} kC^k = \frac{nC^n}{C-1} - C\frac{C^n-1}{(C-1)^2}$$

$$q_{k+1}(t) = tq_k(t) - \frac{||q_k||_w^2}{||q_{k-1}||_w^2}q_{k-1}(t)$$

Exame (2º Teste) de Análise Numérica (LMAC, MEIC, MMA)
Instituto Superior Técnico, 12 de Janeiro de 2015, 16h15-17h30 (2º Teste)

2.1)$_{[3.0]}$ Considere $g(x) = \dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-3}{x+3}$. Calcule a melhor aproximação uniforme $\mathcal{P}_1$:
a) da função $f(x) = g(x)$ no intervalo $[-2, 2]$.
b) da função $f(x) = g(x)(9 - x^2)$ no intervalo $[-1, 1]$.

2.2)$_{[3.0]}$ Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{N\times N}$ (N par) tal que $a_{ij} = \begin{cases} 2C, & (i = j), \\ -C, & (i + j = N + 1), \\ 0, & (\text{caso contrário}). \end{cases}$

a) Localize os valores próprios e conclua sobre a invertibilidade de A, em função de $C \in \mathbb{R}$.
b) Quando $N = 4,\ C = 5$, aplique uma iteração do método QR para aproximar os valores próprios e comente o erro.

2.3)$_{[3.0]}$ Seja $y'(t) = f(t, y(t))$, com $y(0) = y_0$. Seja $h > 0$.
a) Mostre que se $v_k \leq f(t, x) \leq w_k$ ($\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_k, t_k + h]$), então verifica-se

$$\frac{y(t_m) - y_0}{h} \in \left[\sum_{k=0}^{m-1} v_k, \sum_{k=0}^{m-1} w_k\right].$$

b) Com uma inicialização apropriada, discuta em função de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a convergência (e sua ordem) para o método implícito de passo triplo:

$$y_{k+1} = \alpha y_{k-2} + \beta h(f_{k-1} + f_{k+1}).$$

2.4)$_{[1.0]}$ Pretendendo resolver $u''(t) = g(t, u(t))$ com $u'(0) = 0,\ u(1) = 1$, pelo método do tiro, aplicou-se o método da secante. Resolveram-se dois problemas iniciais pelo método de Heun:
– Com $u(0) = 0$ obteve-se $(u(1), u'(1)) \approx (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
– Com $u(0) = \frac{1}{2}$ obteve-se $(u(1), u'(1)) \approx (\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$.
Qual o valor $u(0)$ com que devemos inicializar o método de Heun na iterada seguinte?

Auxiliar.

$$\bar{B}(a_{kk}, r_k), \ \textbf{com } r_k = \sum_{j\neq k} |a_{kj}|$$

$$\sum_{m=-1}^{p-1} \alpha_{-m} = 0 \quad \wedge \quad \sum_{m=-1}^{p-1} \alpha_{-m} m^s = s \sum_{m=-1}^{p-1} \beta_{-m} m^{s-1} \ \textbf{(para } s = 1, \ldots, r\textbf{)},$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]} \quad \textbf{(método da secante para } f(x) = 0\textbf{)}$$

χ-Resolução:

1.1. a) Construímos a tabela de diferenças generalizadas para a interpolação de Hermite para p_4 (há 5 equações)

$$
\begin{array}{lc|ccccccccc}
x & : & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 \\
\hline
p(x) & : & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
\hline
& & & p'(0)=1 & & \frac{1-1}{1-0}=0 & & p'(1)=1 & & p'(1)=1 & \\
& & & & -1 & & 1 & & \frac{1}{2}p''(1)=\frac{1}{2} & & \\
& & & & & 2 & & -\frac{1}{2} & & & \\
& & & & & & -\frac{5}{2} & & & &
\end{array}
$$

resultando pela F. Newton que $p_4(x) = 1 + x - x^2 + 2x^2(x-1) - \frac{5}{2}x^2(x-1)^2$.

1b) A interpolação de $p_4(x) - e^x$ a $f(x)$ equivale à de $p_4(x)$ a $g(x) = f(x) + e^x$, tendo-se para $x \in [-1, 1]$

$$E = |f(x) + e^x - p_4(x)| = |g(x) - p_4(x)| \leq ||g - p_4||_\infty \leq \frac{||g^{(5)}||_\infty}{5!}||x^2(x-1)^3||_\infty \leq 4 + \frac{e}{30}$$

porque $|g^{(5)}(x)| = |f^{(5)}(x) + e^x| \leq ||f^{(5)}||_\infty + ||e^x||_\infty \leq 60 + e$, sendo $|x^2(x-1)^3| \leq |x|^2|x-1|^3 \leq 1 \times 2^3 = 8$, se $x \in [-1, 1]$.

1.2) O spline s em $[0, 1]$ está definido, resta usar a continuidade de s, s', s'' no ponto $x = 0$. Como $s \in \mathcal{P}_3$ em $x \in [-1, 0]$

$$s(x) \quad = \quad s(0) + s'(0)x + \frac{1}{2}s''(0)x^2 + Cx^3$$

sendo $s(0) = 1, s'(0) = 0, s''(0) = 0$, obtemos ainda $s(x) = 1 + Cx^3$ com $3 = s(-1) = 1 - C$, ou seja $C = -2$. Portanto

$$s(x) = \begin{cases} 1 - 2x^3 & (x \in [-1, 0]) \\ x^3 + 1 & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

1.3) A expressão a calcular é $\sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)C^k = \sum_{k=0}^{n-1} k^{[2]}C^k$. Como $\Delta C^k = (C-1)C^k$ temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{[2]}C^k = \frac{1}{C-1}\sum_{k=0}^{n-1} k^{[2]}\Delta C^k = \frac{1}{C-1}\left(\left[k^{[2]}C^k\right]_{k=0}^{k=n} - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta k^{[2]}C^{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{C-1}\left(n^{[2]}C^n - C\sum_{k=0}^{n-1}(2k)C^k\right) = \frac{1}{C-1}\left(n^{[2]}C^n - 2C\left(\frac{nC^n}{C-1} + C\frac{C^n - 1}{(C-1)^2}\right)\right)$$

usando a expressão do formulário quando $C \neq 1$. Se $C = 1$, obtemos $\sum_{k=0}^{n-1} k^{[2]} = n^{[3]}/3$.

1.4. a) A fórmula$Q(f) = (1-\theta)\delta_x f + \theta\delta_y f = (1-\theta)f(x) + \theta f(y)$ tem grau 1 quando

$$
\begin{aligned}
Q(1) \quad &= \quad 1 - \theta + \theta = 1 = A(1) \\
Q(x) \quad &= \quad (1-\theta)x + \theta y = z
\end{aligned}
$$

onde θ é definido por z, $\theta = \frac{z-x}{y-x}$. Agora, pela fórmula de erro

$$A(f) - Q(f) = A(f - p_1)$$

como $A(f - p_1) = f(z) - p_1(z) = f[x, y, z](z-x)(z-y) = \frac{1}{2}f''(\xi)(z-x)(z-y)$. Por isso

$$f(z) = A(f) = Q(f) + \frac{1}{2}f''(\xi)(z-x)(z-y)$$

e o resultado surge de $z-x=-\theta(x-y)$, e de $z-y=(1-\theta)(x-y)$.

1.4. b) Construímos o polinómio ortogonal, sendo $q_0=1, q_1(t)=t$, $q_2(t)=t^2-\frac{||x||_w^2}{||1||_w^2}1$.

Como $||x||_w^2=\int_{-1}^1 t^2t^2dt=[\frac{t^5}{5}]_{-1}^1=\frac{2}{5}$, e com $||1||_w^2=\int_{-1}^1 t^2dt=[\frac{t^3}{3}]_{-1}^1=\frac{2}{3}$, obtemos

$$q_2(t)=t^2-\frac{3}{5}.$$

Agora aplicamos o Teorema para a Fórmula de Gauss, sendo $I(f)=\int_{-1}^1 t^2f(t)dt$ sabemos que

$$Q(f)=\alpha_1 f(z_1)+\alpha_2 f(z_2)$$

terá grau $2\times 2-1=3$ sendo $z_1,z_2=\pm\sqrt{3/5}$ as raízes de q_2. Ou seja

$$Q(f)=\alpha_1 f(\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\alpha_2 f(\left(+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

e os pesos resultam de $\alpha_1+\alpha_2=Q(1)=I(1)=\frac{2}{3}$, e de $(-\alpha_1+\alpha_2)\sqrt{\frac{3}{5}}=Q(x)=I(x)=0$. O que implica $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{5}$.

2.1.a) Usando o Algoritmo de Remes com $X^{(0)}=\{-2,0,2\}$, e sendo $g(x)=\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{-5}-5\\ -2\\ -5-\frac{1}{5}\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}a\\ b\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{18}{5}=-3.6\\ 0\\ -\frac{8}{5}=-1.6\end{bmatrix}$$

sendo $r(x)=f(x)-(a+bx)$, vemos os pontos críticos quando $r'(x)=f'(x)=\frac{-6}{(x-3)^2}+\frac{6}{(x+3)^2}=0$, ou seja, $(x-3)^2=(x+3)^2\Leftrightarrow 12x=0$.

Vemos que $||r||_\infty=\frac{8}{5}=|d|$, pelo que de novo $X^{(1)}=\{-2,0,2\}$, e o algoritmo termina.

Portanto, pelo T. Chebyshev obtemos $p(x)=\frac{-18}{5}\in\mathcal{P}_1$ como melhor aproximação uniforme com erro $\frac{8}{5}$.

2.1.b) Neste caso $f(x)=(x^2-9)g(x)=2x^2-18$, e sendo $p(x)=a+bx\in\mathcal{P}_1$

$$\min_{a,b}\max_{x\in[1,1]}|2x^2-18-a-bx|=2\min_{a,b}\max_{x\in[1,1]}|x^2-9-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}x|$$

Em $[-1,1]$ a minimização é dada pelo polinómio de Chebyshev $\tilde{T}_2(x)=x^2-\frac{1}{2}$.

Isso implica $b=0, -9-a/2=-1/2$. Ou seja $p(x)=-19$.

2.2.a) Facilmente vemos que $\lambda\in\bar{B}(2C,|C|)$ para todos os valores próprios. A matriz é real e simétrica, logo os valores próprios são reais.

Conclui-se que $\lambda\in[2C-|C|,\,2C+|C|]$. Se $C>0$, temos$2C-|C|=C>0$. Se $C<0$, temos$2C+|C|=C<0$. Se $C\neq 0$ está demonstrada a invertibilidade.

2.2.b) Para $N=4$ temos $A_0=\begin{bmatrix}10 & 0 & 0 & -5\\ 0 & 10 & -5 & 0\\ 0 & -5 & 10 & 0\\ -5 & 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$

Começando com $||v^{(1)}||=||(10,0,0,-5)||=5\sqrt{5}$, temos $w^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,0,-1)$.

Como $(0,10,-5,0)\cdot(2,0,0,-1)\frac{1}{\sqrt{5}}=0$, temos $w^{(2)}=\frac{(0,10,-5,0)}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,-1,0)$.

Agora $v^{(3)}=(0,-5,10,0)-0-\frac{1}{5}\overbrace{<(0,-5,10,0),(0,2,-1,0)>}^{=-20}(0,2,-1,0)=(0,3,6,0)$

com $w^{(3)} = \frac{(0,3,6,0)}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2,0)$.

Finalmente $v^{(4)} = (-5,0,0,10) - \frac{1}{5}\overbrace{< (-5,0,0,10),(2,0,0,-1) >}^{=-20}(2,0,0,-1) - 0 - 0 = (3,0,0,6)$
e $w^{(4)} = \frac{(3,0,0,6)}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,0,2)$.

Conclui-se que $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e portanto

$$A_1 = RQ = Q^\top AQ = \sqrt{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 14 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Isto significa que $\lambda_1, \lambda_2 \in [11,17]$, $\lambda_2, \lambda_3 \in [3,9]$ e as aproximações na diagonal têm erro inferior a 3.

2.3. a) Pela expansão de Taylor, $y(t_{k+1}) = y(t_k) + y'(\xi_k)h$, com $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$.
Por outro lado, $\Delta y(t_k) = y(t_{k+1}) - y(t_k) = y'(\xi_k)h$, implica

$$y(t_m) - y(t_0) = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta y(t_k) = \sum_{k=0}^{m-1} y'(\xi_k)h = h\sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k, y(\xi_k))$$

Portanto

$$\sum_{k=0}^{m-1} v_k \leq \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k, y(\xi_k)) = \frac{y(t_m) - y(t_0)}{h} = \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k, y(\xi_k)) \leq \sum_{k=0}^{m-1} w_k.$$

2.3. b) O método envolve apenas y_{k+j}, f_{k+m}, e podemos usar o critério dos coeficientes. Primeiro

$$0 = \sum_{m=-1}^{3-1} \alpha_{-m} = \alpha_1 + \alpha_0 + \alpha_{-1} + \alpha_{-2} = -1 + 0 + 0 + \alpha$$

e a consistência obriga a que $\alpha = 1$. Nesse caso há estabilidade porque a equação característica associada à equação às diferenças $y_{k+1} = \alpha y_{k-2}$ é simplesmente $r^3 - \alpha = 0$. Para $\alpha = 1$ tem uma raiz real simples $r = 1$ (e duas complexas $r^2 + r + 1 = 0$).

A parte restante do critério dos coeficientes permite obter β

$$\sum_{m=-1}^{3-1} \alpha_{-m} m^s = -1(-1)^s + 0 + 0 + \alpha 2^s = s\sum_{m=-1}^{3-1} \beta_{-m} m^{s-1} = s(\beta(-1)^{s-1} + 0 + \beta(1)^{s-1} + 0).$$

Com $s = 1$, resulta $1 + 2\alpha = 1(\beta + \beta) \Leftrightarrow 3 = 2\beta$. Com $s = 2$, obtemos $-1 + 4\alpha = 2(-\beta + \beta) \Leftrightarrow -3 = 0$, impossível.

Assim tem ordem de consistência 1 se $\alpha = 1, \beta = \frac{3}{2}$, e sendo estável é convergente.

2.4. Definimos a função $f(x) = u_x(1) - 1$, onde u_x verifica o problema de Cauchy

$$u_x''(t) = g(t, u(t)),\ u_x(0) = x,\ u_x'(0) = 0.$$

Pelo método do tiro queremos obter $x: \ u_x(1) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$, resolvendo pelo método da secante. Inicializamos com os valores testados

$x_{-1} = 0$ sendo $f(x_{-1}) \approx \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, e $x_0 = \frac{1}{2}$ sendo $f(x_0) \approx \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$. Portanto

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f[x_{-1}, x_0]} \approx \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4} - \frac{-1}{2})/(\frac{1}{2} - 0)} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Consequentemente devemos inicializar o método de Heun seguinte com $u(0) = \frac{1}{3}$.