

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

1º semestre 2019/2020

Curso: MEEC

15 de Janeiro de 2020

Nome: _____

Número: _____

Curso: _____

Sala: _____

Identifique todas as folhas que anexar

O Exame tem a duração de **3 horas** e consiste de 14 problemas. Os Problemas 1 a 5 e 8 a 12 são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 1 valor, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale $-1/3$ da cotação dessa pergunta. Os outros quatro problemas não são de escolha múltipla e a sua cotação figura nas últimas tabelas desta página; Nesses deve justificar as suas respostas e apresentar todos os cálculos que efectuar.

O exame está dividido em duas partes. Pode optar por melhorar a classificação dos dois primeiros testes, nesse caso faz a **Parte 1** (Problemas 1 a 7), ou a do terceiro teste, nesse caso faz a **Parte 2** (Problemas 8 a 14). Se optar por fazer apenas uma das partes (a cotação de cada um dos problemas é a dobrar), deve entregar a prova ao fim de **90 minutos**. Assinale com \times na tabela anexa a sua opção.

Para os problemas de escolha múltipla marque com \times as suas escolhas na tabela anexa.

Prova	
Parte 1 (1ºT+2ºT)	
Parte 2 (3ºT)	
Exame	

	- Parte 1 -					- Parte 2 -				
	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12
A)										
B)										
C)										
D)										

Os quadros abaixo destinam-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Escolha Múltipla		Parte 1 - Prob. 6 e 7		Parte 2 - Prob. 13 e 14	
Parte 1		Prob. 6 a) 0,75 Val	,	Prob. 13 a) 1,0 Val	,
Nº certas		Prob. 6 b) 0,75 Val	,	Prob. 13 b) 1,5 Val	,
Nº erradas		Prob. 6 c) 1,00 Val	,		
Parte 2		Prob. 7 a) 0.6 Val	,	Prob. 14 a)+b) 1,0 Val	,
Nº certas		Prob. 7 b) 0.6 Val	,	Prob. 14 c)+d) 1,0 Val	,
Nº erradas		Prob. 7 c) 0.6 Val	,	Prob. 14 e) 0.5 Val	,
		Prob. 7 d) 0.7 Val	,		
Subtotal	,	Subtotal	,	Subtotal	,
				TOTAL	,

Problema 1 (1 valor) Seja $b = (4, 6, 8)$. Representando os elementos de \mathbb{R}^3 como vectores coluna, qual das seguintes é a matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de um sistema de equações lineares $Au = b$ que é possível e indeterminado e tem $(1, 1, 1)$ como uma das soluções?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Problema 2 (1 valor) Sejam $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $\det C = 1$ e $\text{cof } C$ a matriz dos cofactores de C . Qual é o valor de $\det(\text{cof } C)$?

A) 1, B) 2, C) 8, D) 4.

Problema 3 (1 valor) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ -\alpha & \alpha - \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 - 1 \end{bmatrix}$. Qual o conjunto dos valores de α para os quais A_α é invertível?

A) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ B) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ C) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ D) $[-1, 1]$

Problema 4 (1 valor) Dado um sistema de equações lineares escrito na forma $Au = b$, em que se supõe que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não é invertível e $b \in \mathbb{R}^n$, seja B a matriz aumentada do sistema de equações, $B = [A : b]$. Considere as seguintes afirmações:

- I. O sistema $Au = b$ impossível ou indeterminado, dependendo de $b \in \mathbb{R}^n$.
- II. Existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = b$ tem uma única solução.
- III. $\text{car } A < n$.
- IV. $\text{car } A < \text{car } B$ para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$.

A lista completa de afirmações verdadeiras é:

A) II, B) I, II e III, C) II e III, D) I e III,

Problema 5 (1 valor) Sejam

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o subespaço \mathcal{S} de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ formado por todas as matrizes M tais que $PM = MP$. Pretende-se determinar dos seguintes o par (a, A) , em que a é a dimensão de \mathcal{S} e A é uma das matrizes acima indicadas a que não pertence a \mathcal{S} ; Qual é?

A) $(5, A_1)$, B) $(5, A_2)$, C) $(6, A_2)$, D) $(6, A_3)$.

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 6 (2,5 valores)

(a) Indique bases para os espaços das linhas e das colunas da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Considere a equação matricial $Ax = b_\alpha$, com $b_\alpha = [1 \ -1 \ \alpha]^t$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Indique os valores de α para os quais aquela equação tem solução e determine todas as soluções na forma vectorial.

- (c) Seja \mathcal{P}_2 o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a dois e U o subespaço de \mathcal{P}_2 gerado pelos polinómios seguintes:

$$p(t) = 1 + t - t^2, \quad q(t) = 1 + 2t + 3t^2, \quad r(t) = 2 + 3t + 2t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (i) Calcule a dimensão e indique uma base de U ; (ii) Determine uma base de \mathcal{P}_2 contendo a base de U indicada atrás. (iii) Seja $s(t) = 3 + 4t + t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Calcule as componentes do polinómio s na base indicada na alínea anterior. Use o resultado para determinar uma base do subespaço $U + S$, em que S é o subespaço gerado por s .

.....
Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 7 (2,5 valores) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que é representada em relação às bases canónicas de \mathbb{R}^4 e de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Considere agora em \mathbb{R}^4 a base $\mathcal{B}_r = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 - e_4\}$, em que $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canónica. Fixando em \mathbb{R}^4 a base \mathcal{B}_r e mantendo em $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ a base canónica determine a matriz que representa T em relação a estas bases; (b) Calcule as dimensões do núcleo de T , $N(T)$, e da imagem ou contradomínio de T , $I(T)$; (c) Indique uma base para $I(T)$; (d) Considere a equação linear $T(x) = Y$. Para cada um dos seguintes casos discuta a existência de soluções e, caso existam soluções, determine-as:

(i) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (ii) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

PARTE 2

Problema 8 (1 valor) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definida por

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a + b & b - c \\ b + c & a - b \end{bmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,$$

e as seguintes afirmações:

- I. $\dim \mathcal{N}(T) = 1$, II. T é injectiva, III. T é sobrejectiva, IV. T é invertível,
 onde $\mathcal{N}(T)$ representa o núcleo (ou espaço nulo) de T .

Qual é a lista completa de afirmações **falsas**? **A)** I, **B)** I e III, **C)** I e IV, **D)** II, III e IV.

.....
Problema 9 (1 valor) Considere \mathbb{R}^3 o produto interno usual e seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

Qual dos seguintes vectores pertence a L_A^\perp , o (complemento) ortogonal dos espaço das linhas de A ?

- A)** $(1, 2, -1)$, **B)** $(2, -3, 1)$, **C)** $(-2, 1, 1)$, **D)** $(2, 1, -1)$.

.....
Problema 10 (1 valor) Considere em $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ o produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ao qual pertencem todas as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

Qual das seguintes matrizes é a melhor aproximação (ou aproximação óptima) de matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ por elementos de S ?

- A) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, D) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Problema 11 (1 valor) Seja $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ uma transformação linear cuja representação em relação à base canónica $\mathcal{B}_C = (1, t, t^2)$ de \mathcal{P}_2 é a matriz A definida no Problema 9.

Qual dos seguintes polinómios é vector próprio (ou função própria) de T ?

- A) $2 - t + t^2$, B) $2 + t + t^2$, C) $2 - t - t^2$, D) $2 + t - t^2$, ($t \in \mathbb{R}$).

Problema 12 (1 valor) Seja $U \in L(\mathbb{C}^3)$ uma transformação unitária e $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ com $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, o conjunto dos seus valores próprios. Qual dos seguintes conjuntos pode garantir que contém todos os valores próprios de U^* , a adjunta de U ?

- A) \mathbb{R} B) Λ , C) $\bar{\Lambda} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Lambda\}$, D) $\{0, -1, 1\}$.

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 13 (2,5 valores) (a) Considere em \mathbb{R}^3 o produto interno usual e seja U o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelos vectores $a = (-3, 0, 1)$ e $b = (-3, 3, 1)$. (i) Diga a dimensão e indique uma base de U^\perp , o ortogonal de U . (ii) Determine uma equação cartesiana do plano P de equação vectorial $P = \{p\} + U$, em que $p = (2, 0, 1)$.

(b) Considere agora em \mathbb{R}^3 o produto interno (diferente do usual) definido por

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = (2x_1 + x_3)y_1 + x_2y_2 + (x_1 + 2x_3)y_3,$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Represente-se por V o espaço euclideano assim obtido. (i) Considere o subespaço S de V gerado pelos vectores $v = (1, 1, 0)$, $u = (1, 1, 2)$ e $s = (1, 1, -1)$. Verifique que u e s são vectores ortogonais de V e obtenha uma base ortogonal de S . (ii) Determine o elemento de S mais próximo (na norma de V) do vector $t = (3, -2, 1)$.

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 14 (2,5 valores) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que se μ (real ou complexo) é um valor próprio de A então μ^2 é valor próprio de A^2 ; (b) Calcule o polinómio característico de A e identifique os seus valores próprios; (c) Comente/Justifique a veracidade das duas afirmações seguintes:

I. A não é diagonalizável como matriz real, mas é diagonalizável como matriz complexa;

II. A^2 é diagonalizável como matriz real.

(d) Diagonalize a matriz A^2 , identificando a matriz diagonal D e uma matriz de mudança de base S tal que $D = S^{-1}AS$; (e) Seja C matriz que se obtém de A eliminando a quarta linha e a quarta coluna; Classifique a forma quadrática em \mathbb{R}^3 associada a esta matriz.

