

## EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

1º semestre 2019/2020

Curso: MEEC

15 de Janeiro de 2020

Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Sala: \_\_\_\_\_

**Identifique todas as folhas que anexar**

O Exame tem a duração de **3 horas** e consiste de 14 problemas. Os Problemas 1 a 5 e 8 a 12 são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 1 valor, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale  $-1/3$  da cotação dessa pergunta. Os outros quatro problemas não são de escolha múltipla e a sua cotação figura nas últimas tabelas desta página; Nesses deve justificar as suas respostas e apresentar todos os cálculos que efectuar.

O exame está dividido em duas partes. Pode optar por melhorar a classificação dos dois primeiros testes, nesse caso faz a **Parte 1** (Problemas 1 a 7), ou a do terceiro teste, nesse caso faz a **Parte 2** (Problemas 8 a 14). Se optar por fazer apenas uma das partes (a cotação de cada um dos problemas é a dobrar), deve entregar a prova ao fim de **90 minutos**. Assinale com  $\times$  na tabela anexa a sua opção.

Para os problemas de escolha múltipla marque com  $\times$  as suas escolhas na tabela anexa.

Prova	
Parte 1 (1ºT+2ºT)	<input type="checkbox"/>
Parte 2 (3ºT)	<input type="checkbox"/>
Exame	<input type="checkbox"/>

	- Parte 1 -					- Parte 2 -				
	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12
A)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Os quadros abaixo destinam-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Escolha Múltipla		Parte 1 - Prob. 6 e 7		Parte 2 - Prob. 13 e 14	
<b>Parte 1</b>		Prob. 6 a) 0,75 Val	,	Prob. 13 a) 1,0 Val	,
Nº certas		Prob. 6 b) 0,75 Val	,	Prob. 13 b) 1,5 Val	,
Nº erradas		Prob. 6 c) 1,00 Val	,		
<b>Parte 2</b>		Prob. 7 a) 0.6 Val	,	Prob. 14 a)+b) 1,0 Val	,
Nº certas		Prob. 7 b) 0.6 Val	,	Prob. 14 c)+d) 1,0 Val	,
Nº erradas		Prob. 7 c) 0.6 Val	,	Prob. 14 e) 0.5 Val	,
		Prob. 7 d) 0.7 Val	,		
<b>Subtotal</b>	,	<b>Subtotal</b>	,	<b>Subtotal</b>	,
				<b>TOTAL</b>	,

**Problema 1 (1 valor)** Seja  $b = (4, 6, 8)$ . Representando os elementos de  $\mathbb{R}^3$  como vectores coluna, qual das seguintes é a matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  de um sistema de equações lineares  $Au = b$  que é possível e indeterminado e tem  $(1, 1, 1)$  como uma das soluções?

A)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ , B)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ , C)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ , D)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ .

**Problema 2 (1 valor)** Sejam  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $\det C = 4$  e  $\text{cof } C$  a matriz dos cofactores de  $C$ . Qual é o valor de  $\det(\text{cof } C)$ ?

A) 1, B) 16, C) 8, D) 4.

**Problema 3 (1 valor)** Sejam  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $A_\mu = \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu^2 \\ 1 & \mu & \mu^2 - 1 \\ -\mu & 1 + 2\mu & 1 \end{bmatrix}$ . Qual o conjunto dos valores de  $\mu$  para os quais  $A_\mu$  é invertível?

A)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  B)  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  C)  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  D)  $[-1, 1]$

**Problema 4 (1 valor)** Dado um sistema de equações lineares escrito na forma  $Au = b$ , em que se supõe que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não é invertível e  $b \in \mathbb{R}^n$ , seja  $B$  a matriz aumentada do sistema de equações,  $B = [A : b]$ . Considere as seguintes afirmações:

- I.  $\text{car } A < \text{car } B$  para qualquer  $b \in \mathbb{R}^n$ .
- II.  $\text{car } A < n$ .
- III. O sistema  $Au = b$  impossível ou indeterminado, dependendo de  $b \in \mathbb{R}^n$ .
- IV. Existe  $b \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Au = b$  tem uma única solução.

A lista completa de afirmações verdadeiras é:

A) IV, B) II e IV, C) II e III, D) I, II, e III,

**Problema 5 (1 valor)** Sejam

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o subespaço  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  formado por todas as matrizes  $M$  tais que  $PM = MP$ . Pretende-se determinar dos seguintes o par  $(a, A)$ , em que  $a$  é a dimensão de  $\mathcal{S}$  e  $A$  é uma das matrizes acima indicadas a que não pertence a  $\mathcal{S}$ ; Qual é?

A)  $(6, A_1)$ , B)  $(5, A_2)$ , C)  $(6, A_2)$ , D)  $(5, A_3)$ .

**Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.**

**Problema 6 (2,5 valores)**

(a) Indique bases para os espaços das linhas e das colunas da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

(b) Considere a equação matricial  $Ax = b_\alpha$ , com  $b_\alpha = [1 \ -1 \ \alpha]^t$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Indique os valores de  $\alpha$  para os quais aquela equação tem solução e determine todas as soluções na forma vectorial.

- (c) Seja  $\mathcal{P}_2$  o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a dois e  $U$  o subespaço de  $\mathcal{P}_2$  gerado pelos polinómios seguintes:

$$p(t) = 1 + t - t^2, \quad q(t) = 1 + 2t + 3t^2, \quad r(t) = 2 + 3t + 2t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (i) Calcule a dimensão e indique uma base de  $U$ ; (ii) Determine uma base de  $\mathcal{P}_2$  contendo a base de  $U$  indicada atrás. (iii) Seja  $s(t) = 3 + 4t + t^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Calcule as componentes do polinómio  $s$  na base indicada na alínea anterior. Use o resultado para determinar uma base do subespaço  $U + S$ , em que  $S$  é o subespaço gerado por  $s$ .

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

**Problema 7 (2,5 valores)** Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  que é representada em relação às bases canónicas de  $\mathbb{R}^4$  e de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Considere agora em  $\mathbb{R}^4$  a base  $\mathcal{B}_r = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 - e_4\}$ , em que  $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  é a base canónica. Fixando em  $\mathbb{R}^4$  a base  $\mathcal{B}_r$  e mantendo em  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  a base canónica determine a matriz que representa  $T$  em relação a estas bases; (b) Calcule as dimensões do núcleo de  $T$ ,  $N(T)$ , e da imagem ou contradomínio de  $T$ ,  $I(T)$ ; (c) Indique uma base para  $I(T)$ ; (d) Considere a equação linear  $T(x) = Y$ . Para cada um dos seguintes casos discuta a existência de soluções e, caso existam soluções, determine-as:

(i)  $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,      (ii)  $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

---

**PARTE 2**

---

**Problema 8 (1 valor)** Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  definida por

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a + b & b - c \\ c - b & -(a + b) \end{bmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,$$

e as seguintes afirmações:

- I.  $\dim \mathcal{N}(T) = 1$ ,    II.  $T$  é injectiva,    III.  $T$  é sobrejectiva,    IV.  $T$  é invertível,  
onde  $\mathcal{N}(T)$  representa o núcleo (ou espaço nulo) de  $T$ .

Qual é a lista completa de afirmações **falsas**? **A)** I,    **B)** I e III,    **C)** I e IV,    **D)** II, III e IV.

**Problema 9 (1 valor)** Considere  $\mathbb{R}^3$  o produto interno usual e seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ .

Qual dos seguintes vectores pertence a  $L_A^\perp$ , o (complemento) ortogonal dos espaço das linhas de  $A$ ?

- A)**  $(1, 2, -1)$ ,    **B)**  $(2, -1, -1)$ ,    **C)**  $(2, -3, 1)$ ,    **D)**  $(1, -2, 1)$ .

**Problema 10 (1 valor)** Considere em  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  o produto interno usual e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  ao qual pertencem todas as matrizes da forma  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Qual das seguintes matrizes é a melhor aproximação (ou aproximação óptima) de matriz  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  por elementos de  $S$ ?

- A)  $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ , B)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ , C)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ , D)  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ .

**Problema 11 (1 valor)** Seja  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  uma transformação linear cuja representação em relação à base canónica  $\mathcal{B}_C = (1, t, t^2)$  de  $\mathcal{P}_2$  é a matriz  $A$  definida no Problema 9.

Qual dos seguintes polinómios é vector próprio (ou função própria) de  $T$ ?

- A)  $1 + 2t + t^2$ , B)  $1 - 2t + t^2$ , C)  $1 + 2t - t^2$ , D)  $-1 + 2t + t^2$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ).

**Problema 12 (1 valor)** Seja  $U \in L(\mathbb{C}^3)$  uma transformação unitária e  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$  com  $\theta_i \neq \theta_j, i \neq j$ , o conjunto dos seus valores próprios. Qual dos seguintes conjuntos pode garantir que contém todos os valores próprios de  $U^*$ , a adjunta de  $U$ ?

- A)  $\bar{\Theta} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Theta\}$ , B)  $\{0, -1, 1\}$ , C)  $\Theta$ , D)  $\mathbb{R}$ .

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

**Problema 13 (2,5 valores)** (a) Considere em  $\mathbb{R}^3$  o produto interno usual e seja  $U$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vectores  $a = (1, 0, -3)$  e  $b = (-1, 3, -3)$ . (i) Diga a dimensão e indique uma base de  $U^\perp$ , o ortogonal de  $U$ . (ii) Determine uma equação cartesiana do plano  $P$  de equação vectorial  $P = \{p\} + U$ , em que  $p = (1, 0, 2)$ .

(b) Considere agora em  $\mathbb{R}^3$  o produto interno (diferente do usual) definido por

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = (2x_1 + x_3)y_1 + x_2y_2 + (x_1 + 2x_3)y_3,$$

em que  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Represente-se por  $V$  o espaço euclideano assim obtido. (i) Considere o subespaço  $S$  de  $V$  gerado pelos vectores  $v = (1, 1, 0)$ ,  $u = (1, 1, 2)$  e  $s = (1, 1, -1)$ . Verifique que  $u$  e  $s$  são vectores ortogonais de  $V$  e obtenha uma base ortogonal de  $S$ . (ii) Determine o elemento de  $S$  mais próximo (na norma de  $V$ ) do vector  $t = (3, -2, 1)$ .

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

**Problema 14 (2,5 valores)** Seja  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(a) Mostre que se  $\mu$  (real ou complexo) é um valor próprio de  $A$  então  $\mu^2$  é valor próprio de  $A^2$ ; (b) Calcule o polinómio característico de  $A$  e identifique os seus valores próprios; (c) Comente/Justifique a veracidade das duas afirmações seguintes:

I.  $A$  não é diagonalizável como matriz real, mas é diagonalizável como matriz complexa;

II.  $A^2$  é diagonalizável como matriz real.

(d) Diagonalize a matriz  $A^2$ , identificando a matriz diagonal  $D$  e uma matriz de mudança de base  $S$  tal que  $D = S^{-1}AS$ ; (e) Seja  $C$  matriz que se obtém de  $A$  eliminando a quarta linha e a quarta coluna; Classifique a forma quadrática em  $\mathbb{R}^3$  associada a esta matriz.



