Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Versão A113
rubrica do aluno:

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

1º semestre 2019/2020

Curso: MEEC
15 de Janeiro de 2020

Nome:____
Número:____________
Curso:____________
Sala:____________

Identifique todas as folhas que anexar

O Exame tem a duração de **3 horas** e consiste de 14 problemas. Os Problemas 1 a 5 e 8 a 12 são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 1 valor, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale -1/3 da cotação dessa pergunta. Os outros quatro problemas não são de escolha múltipla e a sua cotação figura nas últimas tabelas desta página; Nesses deve justificar as suas respostas e apresentar todos os cálculos que efectuar.

O exame está dividido em duas partes. Pode optar por melhorar a classificação dos dois primeiros testes, nesse caso faz a **Parte 1** (Problemas 1 a 7), ou a do terceiro teste, nesse caso faz a **Parte 2** (Problemas 8 a 14). Se optar por fazer apenas uma das partes (a cotação de cada um dos problemas é a dobrar), deve entregar a prova ao fim de **90 minutos**. Assinale com × na tabela anexa a sua opção.

Para os problemas de escolha múltipla marque com × as suas escolhas na tabela anexa.

Prova	
Parte 1 (1°T+2°T)	
Parte 2 (3°T)	
Exame	

	- Parte 1 -					- Parte 2 -				
	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12
A)										
B)										
C)										
D)										

Os quadros abaixo destinam-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Escolha Múltipla	
Parte 1	
N° certas	
N° erradas	
Parte 2	
N° certas	
N° erradas	
Subtotal	,

Parte 1 - Prob. 6 e 7		
Prob. 6 a)	0,75 Val	,
Prob. 6 b)	0,75 Val	,
Prob. 6 c)	1,00 Val	,
Prob. 7 a)	0.6 Val	,
Prob. 7 b)	0.6 Val	,
Prob. 7 c)	0.6 Val	,
Prob. 7 d)	0.7 Val	,
Subtotal		,

Parte 2 - Prob. 13 e 14		
Prob. 13 a)	1,0 Val	,
Prob. 13 b)	1,5 Val	,
Prob. 14 a)+b)	1,0 Val	,
Prob. 14 c)+d)	1,0 Val	,
Prob. 14 e)	0.5 Val	,
Subtotal		,

TOTAL	,

PARTE 1

Problema 1 (1 valor) Seja $b = (4, 6, 8)$. Representando os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, qual das seguintes é a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ de um sistema de equações lineares $Au = b$ que é possível e indeterminado e tem $(1, 1, 1)$ como uma das soluções?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

. . . .

Problema 2 (1 valor) Sejam $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det C = 2$ e $\operatorname{cof} C$ a matriz dos cofactores de C. Qual é o valor de $\det(\operatorname{cof} C)$?

A) 1, **B)** 2, **C)** 8, **D)** 4.

. . . .

Problema 3 (1 valor) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 - \alpha \\ -\alpha & 1 - 2\alpha & 1 \end{bmatrix}$. Qual o conjunto dos valores de α para os quais A_α é invertível?

A) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ **B)** $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ **C)** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ **D)** $[-1, 1]$

. . . .

Problema 4 (1 valor) Dado um sistema de equações lineares escrito na forma $Au = b$, em que se supõe que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não é invertível e $b \in \mathbb{R}^n$, seja B a matriz aumentada do sistema de equações, $B = [\,A \vdots b\,]$. Considere as seguintes afirmações:

I. Existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = b$ tem uma única solução.

II. $\operatorname{car} A = n$.

III. $\operatorname{car} A < \operatorname{car} B$ para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$.

IV. O sistema $Au = b$ impossível ou indeterminado, dependendo de $b \in \mathbb{R}^n$.

A lista completa de afirmações verdadeiras é:

A) IV, **B)** II e III, **C)** II e IV, **D)** II, III e IV,

. . . .

Problema 5 (1 valor) Sejam

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado por todas as matrizes M tais que $PM = MP$. Pretende-se determinar dos seguintes o par (a, A), em que a é a dimensão de $\mathcal{S}$ e A é uma das matrizes acima indicadas a que não pertence a S; Qual é?

A) $(6, A_1)$, **B)** $(5, A_2)$, **C)** $(6, A_2)$, **D)** $(5, A_3)$.

. . . .

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 6 (2,5 valores)

(a) Indique bases para os espaços das linhas e das colunas da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Considere a equação matricial $Ax = b_\alpha$, com $b_\alpha = [1 \ -1 \ \alpha]^t$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Indique os valores de α para os quais aquela equação tem solução e determine todas as soluções na forma vectorial.

(c) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a dois e U o subespaço de $\mathcal{P}_2$ gerado pelos polinómios seguintes:

$$p(t) = 1 + t - t^2, \quad q(t) = 1 + 2t + 3t^2, \quad r(t) = 2 + 3t + 2t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Calcule a dimensão e indique uma base de U; (ii) Determine uma base de $\mathcal{P}_2$ contendo a base de U indicada atrás. (iii) Seja $s(t) = 3 + 4t + t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Calcule as componentes do polinómio s na base indicada na alínea anterior. Use o resultado para determinar uma base do subespaço $U + S$, em que S é o subespaço gerado por s.

. . . .

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 7 (2,5 valores) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que é representada em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Considere agora em $\mathbb{R}^4$ a base $\mathcal{B}_r = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 - e_4\}$, em que $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canónica. Fixando em $\mathbb{R}^4$ a base $\mathcal{B}_r$ e mantendo em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a base canónica determine a matriz que representa T em relação a estas bases; (b) Calcule as dimensões do núcleo de T, $N(T)$, e da imagem ou contradomínio de T, $I(T)$; (c) Indique uma base para $I(T)$; (d) Considere a equação linear $T(x) = Y$. Para cada um dos seguintes casos discuta a existência de soluções e, caso existam soluções, determine-as:
(i) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (ii) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

PARTE 2

Problema 8 (1 valor) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a+b & b-c \\ c-b & a+b \end{bmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,$$

e as seguintes afirmações:
I. $\dim \mathcal{N}(T) = 1$, II. T é injectiva, III. T é sobrejectiva, IV. T é invertível,
onde $\mathcal{N}(T)$ representa o núcleo (ou espaço nulo) de T.
Qual é a lista completa de afirmações ***falsas***? **A)** I, **B)** I e III, **C)** I e IV, **D)** II, III e IV.

. . . .

Problema 9 (1 valor) Considere $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Qual dos seguintes vectores pertence a $L_A^\perp$, o (complemento) ortogonal dos espaço das linhas de A?

A) $(1, 2, -1)$, **B)** $(2, -1, -1)$, **C)** $(1, -2, 1)$, **D)** $(2, -3, 1)$.

. . . .

Problema 10 (1 valor) Considere em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ao qual pertencem todas as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

Qual das seguintes matrizes é a melhor aproximação (ou aproximação óptima) de matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ por elementos de S?

A) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

....

Problema 11 (1 valor) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma transformação linear cuja representação em relação à base canónica $\mathcal{B}_C = (1, t, t^2)$ de $\mathcal{P}_2$ é a matriz A definida no Problema 9.
Qual dos seguintes polinómios é vector próprio (ou função própria) de T?

A) $1 - 2t + t^2$, **B)** $-1 + 2t + t^2$, **C)** $1 + 2t - t^2$, **D)** $1 + 2t + t^2$, $(t \in \mathbb{R})$.

....

Problema 12 (1 valor) Seja $U \in L(\mathbb{C}^3)$ uma transformação unitária e $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ com $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, o conjunto dos seus valores próprios. Qual dos seguintes conjuntos pode garantir que contém todos os valores próprios de U^*, a adjunta de U?

A) Λ **B)** $\overline{\Lambda} = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Lambda\}$, **C)** $\mathbb{R}$, **D)** $\{0, -1, 1\}$.

....

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 13 (2,5 valores) (a) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $a = (-3, 0, 1)$ e $b = (-3, 3, 1)$. (i) Diga a dimensão e indique uma base de $U^\perp$, o ortogonal de U. (ii) Determine uma equação cartesiana do plano P de equação vectorial $P = \{p\} + U$, em que $p = (2, 0, 1)$.
(b) Considere agora em $\mathbb{R}^3$ o produto interno (diferente do usual) definido por

$$\ll x, y \gg = (2x_1 + x_3)y_1 + x_2y_2 + (x_1 + 2x_3)y_3 ,$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Represente–se por V o espaço euclideano assim obtido. (i) Considere o subespaço S de V gerado pelos vectores $v = (1, 1, 0)$, $u = (1, 1, 2)$ e $s = (1, 1, -1)$. Verifique que u e s são vectores ortogonais de V e obtenha uma base ortogonal de S. (ii) Determine o elemento de S mais próximo (na norma de V) do vector $t = (3, -2, 1)$.

....

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 14 (2,5 valores) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que se μ (real ou complexo) é um valor próprio de A então μ^2 é valor próprio de A^2; (b) Calcule o polinómio característico de A e identifique os seus valores próprios; (c) Comente/Justifique a veracidade das duas afirmações seguintes:
I. A não é diagonalizável como matriz real, mas é diagonalizável como matriz complexa;
II. A^2 é diagonalizável como matriz real.
(d) Diagonalize a matriz A^2, identificando a matriz diagonal D e uma matriz de mudança de base S tal que $D = S^{-1}AS$; (e) Seja C matriz que se obtém de A eliminando a quarta linha e a quarta coluna; Classifique a forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ associada a esta matriz.
