Exame - Versão A042 - 15/01/2020

Problema 6 (2,5 valores)

(a) Indique bases para os espaços das linhas e das colunas da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Considere a equação matricial $Ax = b_\alpha$, com $b_\alpha = [1\ \ -1\ \alpha]^t$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Indique os valores de α para os quais aquela equação tem solução e determine todas as soluções na forma vectorial.

(c) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a dois e U o subespaço de $\mathcal{P}_2$ gerado pelos polinómios seguintes:

$$p(t) = 1 + t - t^2, \quad q(t) = 1 + 2t + 3t^2, \quad r(t) = 2 + 3t + 2t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Calcule a dimensão e indique uma base de U; (ii) Determine uma base de $\mathcal{P}_2$ contendo a base de U indicada atrás. (iii) Seja $s(t) = 3 + 4t + t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Calcule as componentes do polinómio s na base indicada na alínea anterior. Use o resultado para determinar uma base do subespaço $U + S$, em que S é o subespaço gerado por s.

. . . .

Resolução: a)+b) Tendo em conta o que é pedido torna-se conveniente responder conjuntamente às duas primeiras alíneas.

O método de eliminação de Gauss (MEG) permite obter bases para os espaços das linhas e das colunas de uma matriz:
1. a) Numa matriz em escada de linhas são linearmente independentes as colunas com pivô;
1. b) Numa matriz em escada de linhas são linearmente independentes as linhas com pivô, ou seja, as linhas não nulas;
2. a) Uma base para o espaço das colunas de uma matriz é formado pelo maior subconjunto linearmente independente das colunas de uma matriz, sendo este formado pelas colunas que correspondem (na ordem) às colunas com pivô na matriz em escada de linhas obtida no final do MEG;
2. b) Uma base para o espaço das linhas de uma matriz é formado pelo maior subconjunto linearmente independente das linhas de uma matriz, sendo este formado pelas linhas que dão origem (tendo em conta as trocas de linhas, se as houver) às linhas com pivô (ou linhas não nulas) na matriz em escada de linhas obtida no final do MEG;

Consideremos a matriz aumentada $[A \vdots b_\alpha]$ e implementemos o MEG para esta matriz:

$$[A \vdots b_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \vdots & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \vdots & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \vdots & \alpha \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \vdots & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \vdots & \alpha+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \vdots & \alpha+9 \end{bmatrix} = [C \vdots c_\alpha]$$

De acordo com o que acima ficou dito, concluímos que:
- A matriz em escada de linhas C tem as duas primeiras colunas com pivô e as duas seguintes sem pivô; O maior subconjunto das colunas da matriz A linearmente independente é formado pelas duas primeiras colunas; Este conjunto constitui uma base para o espaço das colunas:

$$B_{C_A} = \{(1, 1, -1), (1, 2, 3)\}.$$

- Não havendo troca de linhas ao longo do MEG, de acordo com o que dissémos atrás, as linhas linearmente independente de A são as duas primeiras; Este conjunto constitui uma base para o espaço das linhas de A; O MEG mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz, pelo que uma outra base (mais simples) para o espaço das linhas de A é constituída pelas linhas não nulas de C:

$$B_{L_A} = \{(-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}.$$

Relativamente a b) a existência de solução do SEL $Au = b_\alpha$ efectivamente depende de α:

(i) Se $\alpha \neq -9$, o SEL é impossível porque uma das equações do SEL, equivalente ao original, $Cu = c_\alpha$ é da forma $0 = \alpha + 9$;

(ii) Se $\alpha = -9$, o SEL é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 2 (= número de colunas sem pivô). Escrevendo o vector solução na forma $u = (x, y, z, w)$ e considerando como incógnitas livres as terceira e quarta ($z, w \in \mathbb{R}$), do SEL simplificado $Cu = c_\alpha$, obtém-se sucessivamente $y = 1 - w$ e $x = -1 + z$, pelo que o conjunto das soluções de $Au = b_{-9}$ é

$$\{(-1 + z, 1 - w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} = \{(-1, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) + w(0, -1, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$

c) (i) A dimensão do subseapaço U é igual ao número de vectores (neste caso polinómios) linearmente independentes de um comjunto G gerador de $U : g = \{p.q, r\}$. Fixemos em $\mathcal{P}_2$ a base canónica. Dado que os espaços $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^3$ são isomorfos, como sabemos o conjunto G é linearmente independente (dependente) em $\mathcal{P}_2$ se e só se for linearmente em $\mathbb{R}^3$ o conjunto $G = \{P, Q, R\}$, em que cada um dos vectores tem a componentes do correspondente (mesma letra) vector de g:

$$G = \{(1, 1, -1), (1, 2, 3), (2, 3, 2)\}.$$

Notemos agora que estes vectores constituem as colunas 1, 2 e 4 da matriz A considerada na alínea anterior. Usando os resultados do MEG aí implementado, concluímos que as duas primeiras colunas são linearmente independentes e que a dimensão do espaço gerado por G é dois, sendo $\{P, Q\}$ uma base deste subespaço de $\mathbb{R}^3$. Consequentemente, pelo isomorfismo já referido, a dimensão de U é 2 e $\{p, q\}$ é uma base de U.

(ii) Seja $\alpha \neq -9$, por exemplo, $\alpha = 0$. Vimos antes que o vector $B_\alpha = (1, -1, \alpha)$ é tal que $Au = b_\alpha$ é impossível ou, o que é equivalente, que $b_\alpha = (1, -1, \alpha)$ não pertence ao espaço das colunas de A sendo, portanto, linearmente independente de P e Q. Em consequência o conjunto $B = \{p, q, b_0)$, com $b_0(t) = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}$, é linearmente independente e, portanto, é uma base de $\mathcal{P}_2$.

(iii) Tem-se $s = 3 + 4t + t^2 = 1 + t - t^2 + 2 + 3t + 2t^2 = (p + r)(t), t \in \mathbb{R}$, ou, equivalentemente $S = (3, 4, 1) = (1, 1, -1) + (2, 3, 2) = P + R$, Consequentemente, a representação de s na base B é

$$s = (1, 1, 0)_B$$

Ora, $s = p + r \in U$ e, portanto $S \subset U$, pelo que $S + U = U$. Uma base de U já foi dada antes.

Problema 7 (2,5 valores) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que é representada em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Considere agora em $\mathbb{R}^4$ a base $\mathcal{B}_r = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 - e_4\}$, em que $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canónica. Fixando em $\mathbb{R}^4$ a base $\mathcal{B}_r$ e mantendo em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a base canónica determine a matriz que representa T em relação a estas bases; (b) Calcule as dimensões do núcleo de T, $N(T)$, e da imagem ou contradomínio de T, $I(T)$; (c) Indique uma base para $I(T)$; (d) Considere a equação linear $T(x) = Y$. Para cada um dos seguintes casos discuta a existência de soluções e, caso existam soluções, determine-as:

(i) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (ii) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

....

Resolução:a) Usando a convenção de notação usada nas aulas, a matriz S de mudança da base canónica de $\mathbb{R}^4$ para a base $\mathcal{B}_r$ é aquela que tem nas suas colunas as componentes dos vectores da base $\mathcal{B}_r$ representados na base canónica, ou seja,

$$S_{\mathbb{R}^4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Designando por B a matriz que representa T em relação ao par de bases, $\mathcal{B}_r$ de $\mathbb{R}^4$ e canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $B_c = B_c(\mathbb{R}^{2\times 2})$, e uma vez que no espaço de chegada não foi alterada a base, tem-se:

$$B = AS_{\mathbb{R}^4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz B tem uma estrutura tão simples que dela já podemos inferir a matriz final da eliminação de Gauss:

$$B \longrightarrow 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) A dimensão do núcleo de T é igual à dimensão do núcleo de uma matriz que a represente, particularmente B, pelo que $\dim N(T) = 1$, o número de linhas nulas ou de colunas sem pivô no final do MEG. Um elemento no núcleo de B é o vector que na base $\mathcal{B}_r$ tem a representação $(0, 0, 0, 1)_{\mathcal{B}_r}$, ou seja, quarto vector da base $\mathcal{B}_r$: $e_2 + e_3 - e_4 = (0, 1, 1, -1)$.

A dimensão da imagem (ou contradomínio) de T é igual à dimensão de espaço das colunas de uma matriz que a represente, particularmente B, pelo que $\dim I(T) = 3$, já que a matriz que se obtém de B pelo MEG tem 3 pivôs.

c) Uma base do espaço das colunas de B é formada pelas suas três primeiras colunas e, em consequência, por via do isomorfismo entre os subespaços considerados como explicado atrás, uma base para $I(T)$ é formada pelas matrizes cujas componentes na base canónica figuram nas três primeiras colunas de B, ou seja

$$B_{I(T)} = \{(1, 0, 0, 1)_{B_c}, (0, 1, 1, 0)_{B_c}, (0, 1, -1, 0)_{B_c}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

d) Note-se a primeira das equações é possível, uma vez que o segundo membro é o primeiro elemento da base da imagem de T atrás indicada, sendo a segunda impossível como se pode constatar por eliminação de Gauss. As soluções de

$$T(x) = Y \text{ com } Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

são da forma

$$x = x_p + \alpha(0, 1, 1, -1), \alpha \in \mathbb{R}$$

em que x_p é uma solução particular, por exemplo, $x_p = 1/2(1, 0, 0, 0)_{\mathcal{B}_r} = 1/2(1, 1, 0, 0)$.

Problema 13 (2,5 valores) (a) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $a = (1, 0, -3)$ e $b = (-1, 3, -3)$. (i) Diga a dimensão e indique uma base de $U^\perp$, o ortogonal de U. (ii) Determine uma equação cartesiana do plano P de equação vectorial $P = \{p\} + U$, em que $p = (1, 0, 2)$.
(b) Considere agora em $\mathbb{R}^3$ o produto interno (diferente do usual) definido por

$$\ll x, y \gg = (2x_1 + x_3)y_1 + x_2y_2 + (x_1 + 2x_3)y_3 \ ,$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Represente–se por V o espaço euclideano assim obtido. (i) Considere o subespaço S de V gerado pelos vectores $v = (1, 1, 0)$, $u = (1, 1, 2)$ e $s = (1, 1, -1)$. Verifique que u e s são vectores ortogonais de V e obtenha uma base ortogonal de S. (ii) Determine o elemento de S mais próximo (na norma de V) do vector $t = (3, -2, 1)$.

....

Resolução:(a) (i) O subespaço U de $\mathbb{R}^3$ é gerado por dois vectores não nulos ($a = (1, 0, -3)$ e $b = (-1, 3, -3)$) e linearmente independentes (pois nenhum deles é múltiplo do outro). Assim, $\dim U = 2$ e como, pelo teorema da decomposição ortogonal $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$, segue-se que $\dim U = 1$, pois $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim U + \dim(U^\perp)$. Um vector $u_\perp = [a\ b\ c]^t$ é ortogonal a todos os elemntos de U e, portanto, aos seus geradores. Tais condições podem ser expressas na forma matricial

$$Bu_\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja $u_\perp$ é um vector no núcleo de B, sendo portanto um múltiplo do vector $(3, 2, 1)$.

(ii) Pertencem ao plano $P = p + U$ com $p = (1, 0, 2)$ os vectores $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $(w - p)\perp u$ com $u \in U$, ou seja, os vectores $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $\langle w - p, u_\perp \rangle = 0$, ou ainda, repesentando os vectores como vectores coluna,

$$\begin{bmatrix} x-1 & y & z-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & y & z-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3(x-1) + 2y + z - 2 = 0$$

ou

$$3x + 2y + z = 5$$

que é a equacção cartesiana pretendida.

(b) Considera-se agora o espaço euclideano V formado pelos ternos ordenados de números reais e com produto interno definido por

$$\ll x, y \gg = (2x_1 + x_3)y_1 + x_2y_2 + (x_1 + 2x_3)y_3 \quad \text{com } x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3).$$

Sendo S o subespaço gerado por $v = (1, 1, 0)$, $u = (1, 1, 2)$ e $s = (1, 1, -1)$, verificamos que $\ll u, s \gg = 0$, pois

$$\ll u, s \gg = (2 \times 1 + 2) \times 1 + 1 \times 1 + (1 + 2 \times 2) \times (-1) = 4 + 1 - 5 = 0.$$

Uma vez que u e s são ortogonais, para obter uma base ortogonal de S basta obter um vector w tal que $w\perp u, w\perp s$ e $L(\{u, s, w\}) = L(\{u, s, v\})$. Tal vector pode ser obtido pelo método de ortogonalização de Gram-Schmidt: Temos duas alternativas:

(A) O conjunto $\{u, s, v\}$ é linearmente independente e, nesse caso, $\{u, s, w\}$ é uma base ortogonal de S;
(B) O conjunto $\{u, s, v\}$ é linearmente dependente e, nesse caso, virá $w = 0$, sendo a base ortogonal de S o conjunto $\{u, s\}$.
Implementando o método de ortogonalização, obtém-se

$$w = v - P_{v,u} - P_{v,s} = v - \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}s = \frac{1}{3}[3(1,1,0) - (1,1,2) - 2(1,1,-1)] = (0,0,0)$$

em que $P_{v,u} = \frac{\ll v,u \gg}{\ll u,u \gg}u = \frac{5}{15}u = \frac{1}{3}u$ e $P_{v,s} = \frac{\ll v,s \gg}{\ll s,s \gg}s = \frac{2}{3}s$, já que $\ll v, u \gg = 5$, $\ll v, s \gg = 2$, $\ll u, u \gg = 15$, $\ll s, s \gg = 3$.

Daqui se conclui que é válida a alternativa (B) antes mencionada.

Problema 14 (2,5 valores) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que se μ (real ou complexo) é um valor próprio de A então μ^2 é valor próprio de A^2; (b) Calcule o polinómio característico de A e identifique os seus valores próprios; (c) Comente/Justifique a veracidade das duas afirmações seguintes:
I. A não é diagonalizável como matriz real, mas é diagonalizável como matriz complexa;
II. A^2 é diagonalizável como matriz real.

(d) Diagonalize a matriz A^2, identificando a matriz diagonal D e uma matriz de mudança de base S tal que $D = S^{-1}A^2S$; (e) Seja C matriz que se obtém de A eliminando a quarta linha e a quarta coluna; Classifique a forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ associada a esta matriz.

....

Resolução:

a) Por definição, se λ (real ou complexo) é valor próprio de A, isso significa que existe um vector u (real ou complexo) não nulo tal que $Bu = \lambda u$, dizendo-se então que u é vector próprio associado ao valor próprio λ. Consequentemente,

$$B^2u = B(Bu) = B(\lambda u) = \lambda Bu = \lambda^2 u$$

e, portanto existe um vector não nulo (u) tal que $B^2u = \lambda^2 u$, pelo que λ^2 é valor próprio de B^2, sendo u um vector próprio associado a esse valor próprio.

b) Os valores próprios de A são as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

que pode ser calculado, por exemplo, usando a regra de Laplace por expansão segundo a primeira linha, vindo

$$p(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

e, usando novamente a regra de Laplace por expansão segundo a terceira linha para o primeiro termo e a primeira linha para o segundo termo , obtém-se

$$p(\lambda) = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1.$$

Consequentemente, os quatro valores próprios de A são as quatro raízes da unidade, cada um deles com multiplicidade algébrica 1, uma vez que são todos distintos:

$$\lambda_n = e^{in\pi/2}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

c) Concluímos atrás que A tem quatro valores próprios (complexos) distintos, dois que coincidem com números reais (± 1) e dois complexos puros ($\pm i$). Como a valores próprios distintos correspondem vectores próprios linearmente independentes, existe uma base de $\mathbb{C}^4$ formada por vectores próprios de A, sendo esta diagonalizável como matriz complexa, embora não como matriz real.

De acordo com a alínea a), os valores próprios da matriz

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são os quadrados dos valores próprios de A, pelo que A^2 tem apenas dois valores próprios distintos, digamos $\mu_\pm$, com $\mu_\pm = \pm 1$. Vejamos agora quais são os espaços próprios $E(\mu_+) = E(1) = N_{A^2-I}$, $E(\mu_-) = E(-1) = N_{A^2+I}$. Usando eliminação de Gauss, vem

$$A^2 - \mu_+ I = A^2 - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A^2 - \mu_- I = A^2 + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde facilmente se conclui que

$$E(1) = L(\{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}), \quad E(-1) = L(\{(1,0,-1,0), (0,1,0,-1)\}).$$

Usando o facto de A^2 só ter valores próprios reais e de a valores próprios distintos de corresponderem vectores próprios linearmente independentes, conclui-se da existência de uma base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores próprios (reais) de A^2, sendo esta diagonalizável como matriz real.

d) Sendo os valores próprios de A^2 reais: $\mu_\pm 1$, a condição necessária e suficiente de diagonalização de A^2 é a existência de uma base de $\mathbb{R}^4$ formada (exclusivamente) por vectores próprios de A^2. Vimos antes que A^2 tem dois valores próprios, ± 1, sendo a dimensão de cada um dos espaços próprios igual a 2. Como a valores próprios distintos estão associados vectores próprios linearmente indenpendentes, tal implica que existe uma base de $\mathbb{R}^4$ formada (exclusivamente) por vectores próprios de A^2, nomeadamente a seguinte base ordenada

$$B = ((1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,0,-1)),$$

em que os primeiros dois elementos são vectores próprios associados a $\mu_+ = 1$ e os restantes a $\mu = -1$. Sendo A^2 diagonalizável, ela é semelhante à matriz dos valores próprios (repetidos de acordo com a sua multiplicidade algébrica):

$$D = \operatorname{diag}\{1, 1, -1, -1\} = S^{-1} A^2 S,$$

sendo uma matriz diagonalizante S, a matriz dos vectores próprios pela ordem escolhida para a base dos vectores próprios (que é a matriz de mudança da base canónica para a base B):

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

e) De acordo com a sua definição $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como se sabe a classificação da forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ associada esta matriz coincide com a classificação da matriz parte simétrica de A, A_s, com

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A classificação da matriz simétrica A_s é feita de acordo com os sinais dos seus valores p̊oprios. O polinómio característico de A_s é dado por

$$q(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} - 1/2 \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

em que se usou a regra de Laplace por expansão segundo a linha 1. Tem-se ainda

$$q(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 1/4) = -\lambda(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-), \text{ com } \lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Uma vez que $\lambda_+ > 0$ e $\lambda_- < 0$ a matriz simétrica A_s e a forma quadrática $Q_A = Q_{A_s}$ são indefinidas.