2° **Teste - Versão 1 - 14/11/2019**

Problema 4 (10 valores)
1. Determine, justificando, uma base para cada um dos subespaços: (i) núcleo de U e (ii) espaço das colunas de U; 2. Sendo $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}$: (a) identifique uma base de S e represente o vector $(1, 1, 1, 1)$ nessa base; (b) Seja $T : S \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(s_1) = (1, 0, 0)$, $T(s_2) = (1, 1, 0)$, $T(s_3) = (1, 1, 1)$, em que $B_S = (s_1, s_2, s_3)$ é a base que indicou atrás. Qual é a representação matricial de T nas bases B_S de S e canónica de $\mathbb{R}^3$? Calcule $T(1, 1, 1, 1)$.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

....

Resolução: 1) Como sabemos para analisar a dependência ou indepenência linear de um conjunto de vectores em $\mathbb{R}^4$ podemos fazê-lo dispondo as componentes desses vectores (na base canónica) nas colunas (ou nas linhas) de uma matriz e analisar a dependência ou independência linear dos conjuntos dessas colunas (ou linhas). O método de eliminação de Gauss fornece um critério para essa análise. No presente caso temos:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [z_1 z_2 z_3 z_4] = Z$$

com

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

São linearmente independentes as colunas de Z que contêm os pivôs da eliminação de Gauss. Neste caso, o conjunto formado pelas 2 primeiras colunas de Z é linearmente independente. O conjunto das quatro colunas de Z é linearmente dependente, uma vez que quer a terceira quer a quarta colunas não contém pivôs. Efectivamente, as terceira e quarta colunas são combinações lineares das duas primeiras: $z_3 = z_1 + z_2$ e $z_4 = 3z_1 - 2z_2$.

Relativamente à matriz original, o conjunto das 2 primeiras colunas é linearmente independente, por corresponderem (na ordem) às colunas de U com pivô. O conjunto das quatro colunas de A é linearmente dependente. Efectivamente, para as terceira e quarta colunas, tem-se $u_3 = u_1 + u_2$ e $u_4 = 3u_1 - 2u_2$ em que cada u_j é a coluna de ordem j de U e $z_j = E_2 E_1 u_j$. Uma base para o espaço das colunas de U é formada pelo conjunto das duas primeiras colunas de U: $B_{C_U} = \{u_1, u_2\}$.

Uma vez que o método de eliminação de Gauss mantém invariante as soluções de um SEL, ou seja, os SEL $Uu = 0$ e $Zu = 0$ (Z é a matriz acima definida) têm as mesmas soluções, resolvendo $Zu = 0$ com $u = (x, y, z, w)$ em que as terceira e quarta incógnitas são livres, $z, w \in \mathbb{R}$, das primeira e segunda equações deste sistema conclui-se que: $y = -z + 2w$ e $x = -z - 3w$. Então o conjunto das soluções de $Zu = 0$ é

$$\{z(-1, -1, 1, 0) + w(-3, 2, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\},$$

sendo uma base do núcleo de U o conjunto dos dois vectores que se obtêm tomando primeiro $z = 1$ e $w = 0$ e depois $z = 0$ e $w = 1$: $B_{N_U} = \{(-1, -1, 1, 0), (-3, 2, 0, 1)\}$.

2a) Resulta da definição do subespaço S que:

$$\begin{aligned}
S &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\} \\
&= \{(y - z + w, y, z, w) : y, z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + w(1,0,0,1) : y, z, w \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

ou seja, $S = L(B_S)$ com $B_S = (s_1, s_2, s_3) = ((1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1))$, sendo B_S uma base ordenada de S, pois claramente gera S e é linearmente independente (como resulta imediatamente da formulação acima: $ys_1 + zs_2 + ws_3 = (0,0,0,0) \Rightarrow y = z = w = 0$). Tem-se $(1,1,1,1) \in S$ e

$$(1,1,1,1) = (1,1,0,0) + (-1,0,1,0) + (1,0,0,1) = s_1 + s_2 + s_3 = (1,1,1)_{B_S}.$$

2b) Uma transformação linear fica completamente definida pelos valores que assume nos elementos de uma base do seu domínio. Neste caso, estando definida em S e tendo sido determinada uma base deste subespaço de $\mathbb{R}^4$ na alínea anterior, decorre imediatamente de

$$T(s_1) = (1,0,0), \quad T(s_2) = (1,1,0), \quad T(s_3) = (1,1,1),$$

que a matriz que representa a transformação T nas bases indicadas é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por ser aquela que tem na sua coluna j ($j = 1, 2, 3$) as componentes de Ts_j na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Por outro lado, como vimos antes $(1,1,1,1) = (1,1,0,0) + (-1,0,1,0) + (1,0,0,1) = s_1 + s_2 + s_3$. Então, usando a linearidade de T, obtém-se:

$$T(1,1,1,1) = T(s_1 + s_2 + s_3) = Ts_1 + Ts_2 + Ts_3 = (1,0,0) + (1,1,0) + (1,1,1) = (3,2,1).$$