1° **Teste - Versão 1 - 17/10/2019**

Problema 4 (10 valores)

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$, $C_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule, em função de λ, o determinante de C_λ e a característica de C_λ; **b)** Determine o conjunto das soluções de $C_1 u = b$; **c)** Calcule a matriz dos cofactores de C_{-1} e use-a para calcular a inversa de C_{-1}; **d)** Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz de ordem n. Considere ainda B a matriz cujas linhas são as seguintes: a linha 1 de B coincide com a linha n de A e, para cada $j \in \{2, ..., n\}$ a linha j de B obtém-se somando as linhas $j-1$ e j de A. Como se relacionam os determinantes de A e B?

. . . .

Resolução:

a e b) Por conveniência resolvemos simultaneamente as duas primeiras alíneas. Para tal usamos o método de elminação de Gauss (MEG), que mantém invariante o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares e também permite calcular a característica e o determinante de uma matriz. Implementando-o para este caso concreto, usando a habitual convenção de notação em que $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, vem

$$[C_\lambda \vdots b] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 & \vdots & 1 \\ \lambda & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2\lambda & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 2(1-\lambda) & \vdots & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2(\lambda-1) & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2(\lambda-1) & \vdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 2(1-\lambda) & \vdots & 1-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2(\lambda-1) & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\lambda)(\lambda+2) & \vdots & 1-\lambda \end{bmatrix} = [U_\lambda \vdots c_\lambda],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(\lambda+1) & 1 \end{bmatrix}.$$

A Característica de C_λ é o número de pivôs após a eliminação de Gauss, pelo que:

$$\operatorname{car} C_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = 1 \\ 2 & \text{se } \lambda = -2 \\ 3 & \text{se } \lambda \notin \{-2, 1\} \end{cases}$$

O valor absoluto do determinante não é alterado pelo MEG, quando não é utilizada a operação de multiplicação de uma linha por um escalar (o que é o caso), sendo o sinal alterado se houver um número ímpar de trocas de linhas (o que também é o caso), vindo

$$\det C_\lambda = -\det U_\lambda = -2(1-\lambda)^2(\lambda+2).$$

Se $\lambda = 1$ há duas linhas nulas na matriz aumentada após a eliminação de Gauss. Em consequência, o SEL $C_1 u = b$ é possível mas indeterminado, com grau de indeterminação 2. Das três incógnitas $u = (x, y, z)$, duas são livres, digamos y e z. O conjunto S das soluções é dado por:

$$S = \{(1-y-2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{(1,0,0) + y(-1,1,0) + z(-2,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

c) Por definição a matriz dos cofactores de $C = C_{-1} = [c_{ij}]$ é dada por $\operatorname{cof} C_{-1} = [c'_{ij}]$, com $c'_{ij} = (-1)^{i+j} \det C_{ij}$, em que a matriz C_{ij} se obtém de C eliminando a linha i e a coluna j. Neste caso temos:

$$c'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad c'_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad c'_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$
$$c'_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad c'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad c'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$
$$c'_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad c'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad c'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pelo que a matriz dos cofactores de C é

$$\operatorname{cof} C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo a inversa de C dada por

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} (\operatorname{cof} C)^t = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Por conveniência de notação consideremos ainda uma terceira matriz, adiante designada por C, cujas linhas são dadas como se segue: a linha 1 de C coincide com a linha n de A e, para cada $j \in \{2, ..., n\}$ a linha j de C é igual à linha $j-1$ de A. Se representarmos por linhas as três matrizes intervenientes temos:

$$A = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_i \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \ell_n \\ \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_{j-1} \\ \vdots \\ \ell_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \ell_n \\ \ell_1 + \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_{j-1} + \ell_j \\ \vdots \\ \ell_{n-1} + \ell_n \end{bmatrix},$$

sendo claro que as linhas de B se obtêm somando as linhas de A e C com excepção da primeira, que coincide com a primeira de C (ou a última de A). As linhas de A e C são as mesmas, mas por outra ordem; uma obtém-se da outra através de uma matriz de permutação:

$$C = PA, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que (por exemplo, usando a regra de Laplace) $\det P = (-1)^{n-1}$, pelo que $\det C = (-1)^{n-1} \det A$. Vejamos agora que $\det B = \det C$, pelo que será

$$\det B = (-1)^{n-1} \det A$$

a resposta à questão colocada.

A relação $\det B = \det C$ é consequência directa da multilinearidade de função determinante de ordem n, já que aplicando a linearidade relativamente a cada uma das linhas começando pela última, obtemos sucessivamente:

$$\det B = \begin{vmatrix} \ell_n \\ \ell_1 + \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_{j-1} + \ell_j \\ \vdots \\ \ell_{n-2} + \ell_{n-1} \\ \ell_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_n \\ \ell_1 + \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_{j-1} + \ell_j \\ \vdots \\ \ell_{n-2} + \ell_{n-1} \\ \ell_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_n \\ \ell_1 + \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_{j-1} + \ell_j \\ \vdots \\ \ell_{n-2} + \ell_{n-1} \\ \ell_{n-1} \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} \ell_n \\ \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_{j-1} \\ \vdots \\ \ell_{n-2} \\ \ell_{n-1} \end{vmatrix} = \det C.$$