

3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

1º semestre 2018/19 - 15/12/2018 - Cursos: MEEC

Nome: _____

Número: _____ O Teste que vai realizar tem a duração de **90 minutos** e consiste de **7** problemas. Os 5 primeiros são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale -1/3 da cotação dessa pergunta. Os dois últimos problemas não são de escolha múltipla e as cotações figuram nas tabelas abaixo. Nesta parte deve justificar as suas respostas e apresentar todos os cálculos que efectuar.

Curso: _____

Sala: _____

| | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| A) | | | | | |
| B) | | | | | |
| C) | | | | | |
| D) | | | | | |

Para os 5 primeiros problemas, marque com \times as suas escolhas na tabela à esquerda.

Os quadros abaixo destinam-se à correcção da prova. Por favor, não escreva nada.

| | | | |
|-----------------------------|--|--|--|
| Número de respostas certas | | Nota da Escolha Múltipla | |
| Número de respostas erradas | | Problema 6 - 5,0 Val.(1,5+1,5+1,0+1,0) | |
| | | Problema 7 - 5.0 Val.(1,25+1,25+1,25+1,25) | |
| | | TOTAL | |

Problema 1: Sejam \mathcal{P}_2 o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a dois e a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida como se segue: sendo $p(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2, t \in \mathbb{R}$, então $Tp = (3p_2, 2p_0 + p_1 + 3p_2, -p_0 + 1p_1 + 4p_2, p_0 - p_1 + 5p_2)$. Considere ainda as seguintes afirmações: 1. $\dim N(T) = 1$, 2. T é sobrejectiva, 3. T é injectiva, 4. $\dim I(T) = 3$.

Qual a lista de afirmações verdadeiras: **A)** 1 e 3; **B)** 1 e 4; **C)** 2 e 3; **D)** 3 e 4.

Problema 2: Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal para o subespaço de \mathbb{R}^3 que é ortogonal ao vector $(-1, -1, 1)$.

A) $\{(-2, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$, **B)** $\{(0, 1, 1), (-2, 1, -1)\}$, **C)** $\{(-2, 1, -1), (-1, 1, 1)\}$, **D)** $\{(-2, 1, -1), (1, 1, 1)\}$.

Problema 3: Sejam V um espaço euclideo de dimensão $n \in \mathbb{N}$ com n par e S um subespaço de V . Considere uma transformação $T \in L(V)$ tal que $T(S) = S^\perp$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira para qualquer subespaço S e transformação $T \in L(V)$ nas condições mencionadas?

A) $\dim S > n/2$, **B)** $\dim S \geq n/2$, **C)** $\dim S \leq n/2$, **D)** $\dim S < n/2$.

Problema 4: Considere o espaço euclideo \mathbf{R}^3 munido do produto interno usual, e seja S o subespaço de \mathbf{R}^3 definido por $S = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$. e P^\perp a projecção ortogonal de \mathbf{R}^3 sobre S^\perp . Qual das seguintes representa P^\perp em relação base canónica de \mathbf{R}^3 ?

A) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, **B)** $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, **C)** $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, **D)** $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 5: Sabe-se que a matriz real $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tem 3 valores próprios distintos, todos números naturais, e dá origem por eliminação de Gauss a uma matriz triangular superior, sendo os elementos da diagonal principal: 5, 4 e 2.

Apenas um dos seguintes pode ser o conjunto dos valores próprios de A ; identifique-o:

A) $\{1, 3, 5\}$, **B)** $\{1, 4, 7\}$, **C)** $\{1, 5, 8\}$, **D)** $\{2, 4, 6\}$.

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 6: Sendo $S = L(\{(0, 1, 1, 0), (2, -1, -3, 0), (1, 3, -1, -3)\}) \subset \mathbb{R}^4$, identifique uma base ortogonal de S .

b) Determine uma base ortogonal de \mathbb{R}^4 que contenha a base de S anterior e obtenha a representação do vector $v = (1, 2, 1, 2)$ na forma $v = y + z$ com $y \in S$ e $z \in S^\perp$.

c) Qual é a equação cartesiana do plano $\{v\} + S$.

d) Pretende-se mostrar que o recíproco do Teorema de Pitágoras: “se, para quaisquer x, y no espaço euclideo V , se tem $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, então $x \perp y$ ” é válido num espaço real, mas não num espaço complexo (dê pelo menos um contra-exemplo).

.....

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 7: Considere a transformação $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definida por

$$T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -d & c \\ b & -a \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- a) Mostre que T é uma transformação linear e determine a sua representação matricial em relação à base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$: $\mathcal{B}_c = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
 - b) Calcule o polinómio característico e identifique os valores próprios T .
 - c) Determine os espaços próprios de T ; T é diagonalizável? T é invertível?
 - d) Seja V um espaço linear de dimensão finita e não nula, $T \in L(V)$. Mostre o o chamado polinómio característico de T é, de facto, uma característica de T e não depende da representação matricial de T considerada.
-