Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Versão F127
rubrica do aluno:

3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

1º semestre 2018/19 - 15/12/2018 - Cursos: MEEC

Nome:____

Número:____________________
Curso:____________________
Sala:____________________

	1	2	3	4	5
A)					
B)					
C)					
D)					

O Teste que vai realizar tem a duração de **90 minutos** e consiste de **7** problemas. Os 5 primeiros são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale -1/3 da cotação dessa pergunta. Os dois últimos problemas não são de escolha múltipla e as cotações figuram nas tabelas abaixo. Nesta parte deve justificar as suas respostas e apresentar todos os cálculos que efectuar.

Para os 5 primeiros problemas, marque com $\times$ as suas escolhas na tabela à esquerda.

Os quadros abaixo destinam-se à correcção da prova. Por favor, não escreva nada.

Número de respostas certas	
Número de respostas erradas	

Nota da Escolha Múltipla	
Problema 6 - 5,0 Val.(1,5+1,5+1,0+1,0)	
Problema 7 - 5.0 Val.(1,25+1,25+1,25+1,25)	
TOTAL	

Problema 1: Sejam $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a dois e a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^4$ definida como se segue: sendo $p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2, t \in \mathbb{R}$, então $Tp = (p_1 + 2p_2, 2p_0 + 4p_1 + 3p_2, -p_0 + 2p_1 + p_2, p_0 - 2p_1 + 5p_2)$. Considere ainda as seguintes afirmações:
1. T é injectiva, 2. $\dim I(T) = 3$, 3. T é sobrejectiva, 4. $\dim N(T) = 1$.
Qual a lista de afirmações verdadeiras: **A)** 1 e 2; **B)** 1 e 3; **C)** 2 e 4; **D)** 3 e 4.

. . . .

Problema 2: Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que é ortogonal ao vector $(1, 1, -1)$.
A) $\{(1, 1, 2), (0, 1, -1)\}$, **B)** $\{(1, 1, 2), (1, 1, -1)\}$, **C)** $\{(1, 1, 2), (-1, 1, 0)\}$, **D)** $\{(-1, 1, 0), (1, 2, 3)\}$.

. . . .

Problema 3: Sejam V um espaço euclideano de dimensão $n \in \mathbb{N}$ com n par e S um subespaço de V. Considere uma transformação $T \in L(V)$ tal que $T(S) = S^\perp$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira para qualquer subespaço S e transformação $T \in L(V)$ nas condições mencionadas ?
A) $\dim S > n/2$, **B)** $\dim S \geq n/2$, **C)** $\dim S \leq n/2$, **D)** $\dim S < n/2$.

. . . .

Problema 4: Considere o espaço euclideano $\mathbf{R}^3$ munido do produto interno usual, e seja S o subespaço de $\mathbf{R}^3$ definido por $S = \{(x, y, z) : -x + y - z = 0\}$. e $P^\perp$ a projecção ortogonal de $\mathbf{R}^3$ sobre $S^\perp$. Qual das seguintes representa $P^\perp$ em relação base canónica de $\mathbf{R}^3$?

A) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, **B)** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **C)** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, **D)** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

. . . .

Problema 5: Sabe-se que a matriz real $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tem 3 valores próprios distintos, todos números naturais, e dá origem por eliminação de Gauss a uma matriz triangular superior, sendo os elementos da diagonal principal 6, 2 e 2.
Apenas um dos seguintes pode ser o conjunto dos valores próprios de A; identifique-o:

A) $\{2, 3, 4\}$, **B)** $\{1, 3, 5\}$, **C)** $\{2, 3, 5\}$, **D)** $\{2, 4, 6\}$.

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 6: Sendo $S = L(\{(0,1,-1,0),(2,-5,3,0),(1,-1,-3,-3)\}) \subset \mathbb{R}^4$, identifique uma base ortogonal de S.

b) Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha a base de S anterior e obtenha a representação do vector $v = (1,2,1,2)$ na forma $v = y + z$ com $y \in S$ e $z \in S^{\perp}$.

c) Qual é a equação cartesiana do plano $\{v\} + S$.

d) Pretende-se mostrar que o recíproco do Teorema de Pitágoras: "se, para quaisquer x, y no espaço euclideano V, se tem $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$, então $x \perp y$" é válido num espaço real, mas não num espaco complexo (dê pelo menos um contra-exemplo).

. . . .

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 7: Considere a transformação $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -d & c \\ b & -a \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

a) Mostre que T é uma transformação linear e determine a sua representação matricial em relação à base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$: $\mathcal{B}_c = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
b) Calcule o polinómio característico e identifique os valores próprios T.
c) Determine os espaços próprios de T; T é diagonalizável? T é invertível?
d) Seja V um espaço linear de dimensão finita e não nula, $T \in L(V)$. Mostre o o chamado polinómio característico de T é, de facto, uma característica de T e não depende da representação matricial de T considerada.
