

3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

1º semestre 2018/19 - 15/12/2018 - Cursos: MEEC

Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_ O Teste que vai realizar tem a duração de **90 minutos** e consiste de **7** problemas. Os 5 primeiros são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale -1/3 da cotação dessa pergunta. Os dois últimos problemas não são de escolha múltipla e as cotações figuram nas tabelas abaixo. Nesta parte deve justificar as suas respostas e apresentar todos os cálculos que efectuar.

Curso: \_\_\_\_\_

Sala: \_\_\_\_\_

	1	2	3	4	5
A)					
B)					
C)					
D)					

Para os 5 primeiros problemas, marque com  $\times$  as suas escolhas na tabela à esquerda.

Os quadros abaixo destinam-se à correcção da prova. Por favor, não escreva nada.

Número de respostas certas		Nota da Escolha Múltipla	
Número de respostas erradas		Problema 6 - 5,0 Val.(1,5+1,5+1,0+1,0)	
		Problema 7 - 5.0 Val.(1,25+1,25+1,25+1,25)	
		TOTAL	

**Problema 1:** Sejam  $\mathcal{P}_2$  o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a dois e a transformação linear  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida como se segue: sendo  $p(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2, t \in \mathbb{R}$ , então  $Tp = (3p_2, 2p_0 + p_1 + 3p_2, -p_0 + 1p_1 + 4p_2, p_0 - p_1 + 5p_2)$ . Considere ainda as seguintes afirmações: 1.  $\dim N(T) = 1$ , 2.  $T$  é sobrejectiva, 3.  $T$  é injectiva, 4.  $\dim I(T) = 3$ .

Qual a lista de afirmações verdadeiras: **A)** 1 e 3; **B)** 1 e 4; **C)** 2 e 3; **D)** 3 e 4.

**Problema 2:** Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal para o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  que é ortogonal ao vector  $(1, 1, -1)$ .

**A)**  $\{(1, 1, 2), (0, 1, -1)\}$ , **B)**  $\{(1, 1, 2), (1, 1, -1)\}$ , **C)**  $\{(1, 1, 2), (-1, 1, 0)\}$ , **D)**  $\{(-1, 1, 0), (1, 2, 3)\}$ .

**Problema 3:** Sejam  $V$  um espaço euclideo de dimensão  $n \in \mathbb{N}$  com  $n$  par e  $S$  um subespaço de  $V$ . Considere uma transformação  $T \in L(V)$  tal que  $T(S) = S^\perp$ . Qual das seguintes afirmações é verdadeira para qualquer subespaço  $S$  e transformação  $T \in L(V)$  nas condições mencionadas?

**A)**  $\dim S \geq n/2$ , **B)**  $\dim S > n/2$ , **C)**  $\dim S < n/2$ , **D)**  $\dim S \leq n/2$ .

**Problema 4:** Considere o espaço euclideo  $\mathbf{R}^3$  munido do produto interno usual, e seja  $S$  o subespaço de  $\mathbf{R}^3$  definido por  $S = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$ . e  $P^\perp$  a projecção ortogonal de  $\mathbf{R}^3$  sobre  $S^\perp$ . Qual das seguintes representa  $P^\perp$  em relação base canónica de  $\mathbf{R}^3$ ?

**A)**  $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , **B)**  $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ , **C)**  $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ , **D)**  $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Problema 5:** Sabe-se que a matriz real  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tem 3 valores próprios distintos, todos números naturais, e dá origem por eliminação de Gauss a uma matriz triangular superior, sendo os elementos da diagonal principal: 3, 4 e 2.

Apenas um dos seguintes pode ser o conjunto dos valores próprios de  $A$ ; identifique-o:

**A)**  $\{1, 3, 5\}$ , **B)**  $\{1, 3, 8\}$ , **C)**  $\{2, 3, 5\}$ , **D)**  $\{3, 4, 6\}$ .



---

**Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.**

**Problema 6:** Sendo  $S = L(\{(0, 1, -1, 0), (2, -5, 3, 0), (1, -1, -3, -3)\}) \subset \mathbb{R}^4$ , identifique uma base ortogonal de  $S$ .

b) Determine uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^4$  que contenha a base de  $S$  anterior e obtenha a representação do vector  $v = (1, 2, 1, 2)$  na forma  $v = y + z$  com  $y \in S$  e  $z \in S^\perp$ .

c) Qual é a equação cartesiana do plano  $\{v\} + S$ .

d) Pretende-se mostrar que o recíproco do Teorema de Pitágoras: “se, para quaisquer  $x, y$  no espaço euclideo  $V$ , se tem  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ , então  $x \perp y$ ” é válido num espaço real, mas não num espaço complexo (dê pelo menos um contra-exemplo).

.....

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

**Problema 7:** Considere a transformação  $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  definida por

$$T \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -d & c \\ b & -a \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- a) Mostre que  $T$  é uma transformação linear e determine a sua representação matricial em relação à base canónica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ :  $\mathcal{B}_c = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ .
  - b) Calcule o polinómio característico e identifique os valores próprios  $T$ .
  - c) Determine os espaços próprios de  $T$ ;  $T$  é diagonalizável?  $T$  é invertível?
  - d) Seja  $V$  um espaço linear de dimensão finita e não nula,  $T \in L(V)$ . Mostre o o chamado polinómio característico de  $T$  é, de facto, uma característica de  $T$  e não depende da representação matricial de  $T$  considerada.
-