3° **Teste - Versão E714 - 15/12/2018**

Problema 6 (5 valores)

a) Sendo $S = L(\{(0,1,1,0),(2,-3,-1,0),(1,-1,3,-3)\}) \subset \mathbb{R}^4$, identifique uma base ortogonal de S.

b) Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha a base de S anterior e obtenha a representação do vector $v = (1,2,1,2)$ na forma $v = y + z$ com $y \in S$ e $z \in S^\perp$.

c) Qual é a equação cartesiana do plano $\{v\} + S$.

d) Pretende-se mostrar que o recíproco do Teorema de Pitágoras: "se, para quaisquer x, y no espaço euclideano V, se tem $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$, então $x \perp y$" é válido num espaq real, mas não num espaço complexo (dê pelo menos um contra-exemplo).

....

Resolução: a) Tendo em conta o que nos é pedido na alínea c), optamos por obter primeiro uma equação cartesiana de S e posteriormente uma base ortogonal de S, em detrimento de aplicar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Para obter Uma equação cartesiana de S exigimos que o SEL $Au = b$ com $b = (x,y,z,w)$ seja possível, em que A é a matriz cujas colunas contêm as componentes dos vectores geradores do plano. Usando a matriz aumentada daquele SEL, obtém-se por eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & \vdots & x \\ -1 & 1 & -3 & \vdots & y \\ 3 & 1 & -1 & \vdots & z \\ -3 & 0 & 0 & \vdots & w \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & \vdots & x \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & x+y \\ 0 & 1 & -7 & \vdots & z-3x \\ 0 & 0 & 6 & \vdots & w+3x \end{array}\right]$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & \vdots & x \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & x+y \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & z-4x-y \\ 0 & 0 & 6 & \vdots & w+3x \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & \vdots & x \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & x+y \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & z-4x-y \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -x-y+z+w \end{array}\right]$$

uma equação cartesiana de S é pois $-x - y + z + w = 0$, tendo S dimensão 3 e imediatamente permite identificar um vector gerador de $S^\perp$: $s_\perp = (-1,-1,1,1)$. Para escolher uma base ortogonal de S escolhemos 3 vectores que não satisfazem a relação anterior e que sejam ortogonais a $s_\perp$ (para o produto interno usual), o que é simples, bastando tomar os seguintes: $B_S = (s_1, s_2, s_3)$ com

$$s_1 = (1,-1,0,0), s_2 = (0,0,1,-1), s_3 = (1,1,1,1).$$

b) Uma base de $\mathbb{R}^4$ com as características desejadas obtém-se por $B = \{s_1, s_2, s_3, s_\perp\}$, os primeiros 3 vectores geram S e o restante gera $S^\perp$. Para obter a representação de $v = (1,2,1,2)$, basta calcular a sua projecção ortogonal sobre um dos subespaços S ou $S^\perp$, sendo a segunda mais fácil: Designando Por P respectivamente $P^\perp$) a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre S ($S^\perp$), vem

$$z = P^\perp v = \frac{\langle v, s_\perp \rangle}{4}(-1,-1,1,1) = 0, \quad y = Pv = v.$$

c) Designado por $u = (x,y,z,w)$ os elementos de $\{v\} + S$; tem-se $u - v = s \in S$ e, portanto o vector $(x-1, y-2, z-1, w-2)$ satisfaz a equação cartesiana de S que já determinámos.

Logo a representação pretendida é

$$-x - y + z + w = \langle v, s_\perp \rangle = 0,$$

pois $v \in S$, como vimos.

d) Sendo V um espaço euclideano (real ou complexo), suponhamos que para quaisquer $x, y \in V$ se tem $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - (\|x\|^2 + 2Re(\langle x,y \rangle) + \|y\|^2 = -2Re(\langle x,y \rangle) \end{aligned}$$

Daqui resulta que V for real , se tem $Re\langle x,y \rangle = \langle x,y \rangle = 0$, estabelcendo o resultado desejado. No entanto, se V for complexo pode ter-se $Re\langle x,y \rangle = 0$ com $Im(\langle x,y \rangle) \neq 0$, não sendo o recíproco válido nesse caso. É o que acontece tomando $V = \mathbb{C}$ com $x = 1$, $y = i$. Tem-se $\|x\|^2 = \|y\|^2 = 1$, $\|x+y\|^2 = 2$, $Re\langle x,y \rangle = 0$ e $Im\langle x,y \rangle = -1$.

Problema 7 (5 valores)

Considere a transformação $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dedinida por $T(A) = A^t - \mathrm{tr}(A)I$, onde A^t é a transposta de A, I é a matriz identidade de ordem 2, e $\mathrm{tr}(A)$ é o traço de A.

a) Mostre que T é uma transformação linear e determine a sua representação matricial em relação à base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$: $\mathcal{B}_c = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

b) Calcule o polinómio característico e identifique os valores próprios T.

c) Determine os espaços próprios de T; T é diagonalizável? T é invertível?

d) Seja V um espaço linear de dimensão finita, $T \in L(V)$. Mostre o o chamado polinómio característico de T é, de facto, uma característica de T e não depende da representação matricial de T considerada.

. . . .

Resolução: a) A transformação T é linear se, para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tem $T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)$. Ora,

$$\begin{aligned} T(\alpha A + \beta B) &= (\alpha A + \beta B)^t - \mathrm{tr}(\alpha A + \beta B)I = \alpha A^t + \beta B^t - \alpha \mathrm{tr} A - \beta \mathrm{tr} B \\ &= \alpha A^t - \alpha \mathrm{tr} A + \beta B^t \mathrm{tr} B = \alpha T(A) + \beta T(B), \end{aligned}$$

onde se usaram as propriedades do traço e da transposição , pelo que T é linear.

Para obter a representação matricial de T em relação à base canónica, calculamos as imagens por T dos vectores da base canónica e exprimimos o resultado na base canónica, sendo as componentes colocados na coluna da ordem correspondente ao do elemento da base considerado:

$$T(E_{11}) = E_{11} - I = E_{11} - E_{11} - E_{22} = -E_{22}, \quad T(E_{12}) = E_{21}$$
$$T(E_{21}) = E_{12}, \quad T(E_{22}) = E_{22} - I = E_{22} - E_{11} - E_{22} = -E_{11}.$$

Assim,

$$A = M(T; (\mathbb{R}^{2\times 2})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) O polinómio característico é dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ e as suas raízes são os valores próprios de A ou de T. Tem-se

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

Consequentemente T (ou A) tem dois valores próprios distintoa, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_1 = -1$, cada um deles com multiplicidade algébrica igual a dois.

c) Calculemos agora os espaços próprios associados a cada um dos valores próprios:

- $E(1) = N(T - I) \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\breve{E} = N_{A-I} \subset \mathbb{R}^4$; $E(1)$ e $\breve{E}(1)$ são subespaços isomorfos.

$$(A - I)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} u = 0.$$

  Daqui se conclui que $\breve{E}(1) = N_{A-I} = \{\alpha(0,1,1,0) + \beta(1,0,0,-1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e que $\dim \breve{E}(1) = 2$; Logo, $E(1) = N(T - I) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ e $\dim E(1) = 2$.

- $E(-1) = N(T + I) \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\breve{E}(-1) = N_{A+I} \subset \mathbb{R}^4$; $E(-1)$ e $\breve{E}(-1)$ são subespaços isomorfos.

$$(A + I)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u = 0.$$

  Daqui se conclui que $\breve{E}(1) = N_{A-I} = \{\alpha(0,1,-1,0) + \beta(1,0,0,1)\} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e que $\dim \breve{E}(-1) = 2$; Logo, $E(-1) = N(T + I) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ e $\dim E(-1) = 2$.

Cada um dos valores próprios de T tem igual multiplicidade algébrica e geométrica: $n_1 = m_1 = 2$ e $n_{-1} = m_{-1} = 2$. Consequentemente, A é semelhante a uma matriz diagonal e, portanto, existe uma base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores próprios de A, e existe uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ em relação à qual T é diagonalizável.

Uma transformação é invertível se e só se o seu núcleo for trivial. Como o zero não é valor próprio de T, então T tem o núcleo trivial e, portanto, é invertível.

d) Sejam B_V e $\tilde{B}_V$ duas bases ordenadas de V e sejam A e B as representações matriciais de T em relação a cada uma daquelas bases, respectivamente. O polinómio característico de T associado à representação A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Por outro lado, O polinómio característico de T associado à representação B é $q(\lambda) = \det(B - \lambda I)$. Queremos provar que $q = p$, o que implica o resultado a provar. Para tal invocamos o facto de que quaisquer duas matrizes que representam a mesma transformação linear são semelhantes: existe uma matriz invertível S tal que:

$$B = S^{-1}AS.$$

De facto S é como sabemos uma matriz de mudança de base. Usando a igualdade anterior, vem

$$q(\lambda) = \det(S^{-1}AS-\lambda I) = \det(S^{-1}AS-\lambda S^{-1}S) = \det(S^{-1}(A-\lambda I)S) = 1/\det S p(\lambda) \det S = p(\lambda),$$

que é o resultado pretendido.