Exemplo de inversão de uma matriz 3×3 usando determinantes: sinais dos cofactores

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}. \qquad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\det A$: Usando, por exemplo, a regra de Laplace por expansão segundo a 1ª linha, obtém-se

$$\begin{aligned} \det A &= 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2\times(-11) - (-3) + 3\times 7 = -22 + 24 = 2 \quad (\Rightarrow A \text{ é invertível}). \end{aligned}$$

Cálculo de $\operatorname{cof} A$ e da sua transposta:

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -11 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -2 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} -11 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Por exemplo:

$$(\operatorname{cof} A)_{11} = +\det A_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$(\operatorname{cof} A)_{12} = -\det A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$(\operatorname{cof} A)_{13} = +\det A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$\vdots$$

Inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} -11/2 & 2 & 5/2 \\ 3/2 & -1 & -1/2 \\ 7/2 & -1 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo do uso da Regra de Cramer, para a resolução do sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad (\Rightarrow A \text{ é invertível}),$$

e, sendo C_j a matriz que se obtém de A substituindo a sua coluna j pelo vector dos termos independentes,

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \det C_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \det C_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

(usando, por exemplo, a fórmula de Laplace, por expansão segundo a primeira coluna). Consequentemente,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \det C_1 \\ \det C_2 \\ \det C_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$