

Determinante de uma matriz 3×3 : $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^3$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{d(e_1, e_2, e_3)} = 1 & \underbrace{d(e_2, e_3, e_1)} = 1 & \underbrace{d(e_3, e_1, e_2)} = 1 \\ = & a_{11} a_{22} a_{33} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12} a_{23} a_{31} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{13} a_{21} a_{32} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + & a_{11} a_{23} a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{12} a_{21} a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{13} a_{22} a_{31} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & \underbrace{d(e_1, e_3, e_2)} = -1 & \underbrace{d(e_2, e_1, e_3)} = -1 & \underbrace{d(e_3, e_2, e_1)} = -1 \end{aligned}$$

Equivalentemente, o determinante de uma matriz $n \times n$: $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, pode escrever-se como

$$\det A = \sum_{(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega) \in \Pi} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\omega} \det P_{(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega)}$$

em que

- Π é o conjunto de todas as permutações ~~do terço~~ ^{da n -pla} $(1, \dots, n)$,
i.e. o conjunto de todos os ternos cujas componentes são números inteiros distintos de 1 a ~~3~~ ^{n} .
- $P_{(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega)}$ é a matriz que se obtém da identidade de ordem ~~3~~ ^{n} substituindo:
 - a linha 1 pela linha α ,
 - a linha 2 pela linha β ,
 - a linha 3 pela linha γ ,
 - \vdots
 - a linha ~~3~~ ^{n} pela linha ω .

Alternância de sinal $\Rightarrow \det P_{(\alpha, \beta, \gamma)} = \pm 1$

$$\text{sign } p = \begin{cases} 1 & \text{permutação par (nº par de trocas na identidade de ordem } n) \\ -1 & \text{permutação ímpar (nº ímpar de trocas na identidade de ordem } n) \end{cases}$$

Então

$$\det A = \sum_{p \in \Pi} \text{sign } p \cdot a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\omega}$$