Determinante de uma matriz 3×3: $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{3}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}^{d(e_1,e_2,e_3)\,=\,1} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}^{d(e_2,e_3,e_1)\,=\,1} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}^{d(e_3,e_1,e_2)\,=\,1}$$

$$+ \; a_{11}\,a_{23}\,a_{32} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{d(e_1,e_3,e_2)\,=\,-1} + a_{12}\,a_{21}\,a_{33} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{d(e_2,e_1,e_3)\,=\,-1} + a_{13}\,a_{22}\,a_{31} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{d(e_3,e_2,e_1)\,=\,-1}$$

Equivalentemente, o determinante de uma matriz 3×3: $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{3}$, pode escrever-se como

$$\det A = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in \prod} a_{1\alpha}\,a_{2\beta}\,a_{3\gamma} \quad \det P_{(\alpha,\beta,\gamma)}$$

em que

- $\prod$ é o conjunto de todas as permutações do terno (1,2,3), i.e. o conjunto de todos os ternos cujas componentes são números inteiros distintos de 1 a 3.
- $P_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ é a matriz que se obtém da identidade de ordem 3 substituindo:
  a linha 1 pela linha α,
  a linha 2 pela linha β,
  a linha 3 pela linha γ.

Alternância de sinal $\quad\Rightarrow\quad \det P_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \pm 1$

$$\operatorname{sign} p = \begin{cases} 1 & \text{permutação par (n° par de trocas na identidade de ordem 3)} \\ -1 & \text{permutação ímpar (n° ímpar de trocas na identidade de ordem 3)} \end{cases}$$

Então

$$\det A = \sum_{p\,\in \prod} \operatorname{sign} p \;\; a_{1\alpha}\,a_{2\beta}\,a_{3\gamma}$$

Determinante de uma matriz $n \times n$: $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$

$$\det A = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma\ldots w)\in \prod} a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} \ldots a_{nw} \det P_{(\alpha,\beta,\gamma\ldots w)}$$

- $\prod$ **é o conjunto de todas as permutações da n-pla $(1, 2, \ldots n)$,**
  i.e. o conjunto de todos as n-plas cujas componentes são números inteiros distintos de 1 a n.

- $P_{(\alpha,\beta,\gamma\ldots w)}$ **é a matriz que se obtém da identidade de ordem n substituindo:**

  a linha 1 pela linha α,
  a linha 2 pela linha β,
  a linha 3 pela linha γ,
  $\vdots$
  a linha n pela linha ω.

Alternância de sinal $\quad \Rightarrow \quad \det P_{(\alpha,\beta,\gamma\ldots w)} = \pm 1$

$$\operatorname{sign} p = \begin{cases} 1 & \text{permutação par (n° par de trocas na identidade de ordem } n\text{)} \\ -1 & \text{permutação ímpar (n° ímpar de trocas na identidade de ordem } n\text{)} \end{cases}$$

Então

$$\det A = \sum_{p\,\in \prod} \operatorname{sign} p \;\; a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} \ldots a_{n\omega}$$